

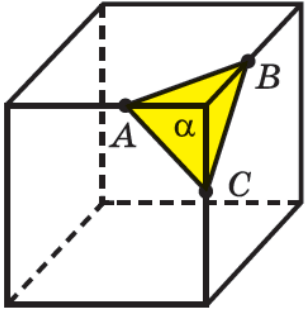
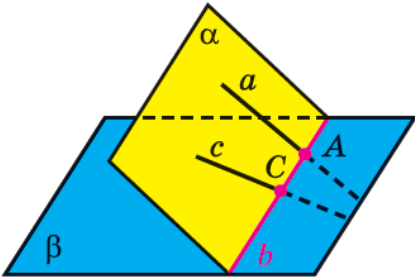
НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ.

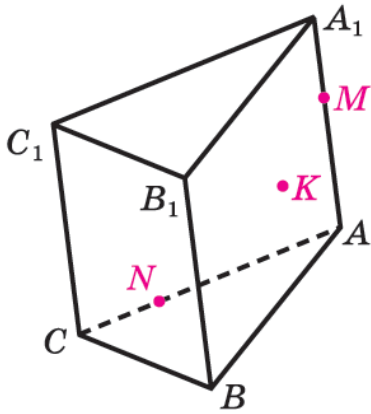
План

1. Зміст задач на побудову.
2. Задачі на побудову перерізів многогранників. Метод слідів.
3. Приклади розв'язування задач.

ЛІТЕРАТУРА

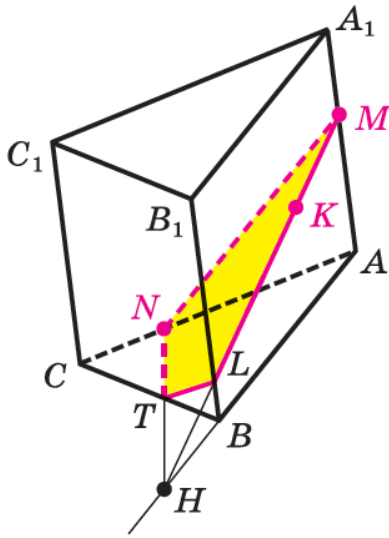
1. О.Я.Білянiна, Г.І.Білянiна, В.О.Швець. Геометрія 10 клас. Академічний рівень. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Київ «Генеза», 2010
2. Є.П.Нелін. Геометрія. Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів Академічний і профільний рівні. Харків «Гімназія» 2010
3. М.І.Бурда, Н.І.Тарасенкова. Геометрія. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.: Київ «Зодіак-ЕКО», 2010, 174 с.

ПЕРЕРІЗ МНОГОГРАННИКА ПЛОЩИНОЮ	
Означення і зміст побудови	Приклад
<p><i>Перерізом</i> многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і цієї площини.</p> <p>Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника, а для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).</p>	 <p>Перерізом куба площиною α, яка проходить через точки A, B, C на ребрах куба, що виходять з однієї вершини, є трикутник ABC.</p>
ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ МЕТОДОМ СЛІДІВ	
Основні поняття	
 <p>Якщо площина α перетинає площину β по прямій b, то пряма b називається <i>слідом площини α на площині β</i>.</p> <p>Для того щоб отримати слід площини α на площині β (тобто пряму b), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β.</p>	
Приклад	
<p>Побудуйте переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де $M \in AA_1$, $N \in AC$ і точка K лежить у грані AA_1B_1B.</p>	



Розв'язання

- ▶ 1. Розглянемо допоміжну площину AA_1B_1B . Слід цієї площини на площині основи — пряма AB .
2. У допоміжній площині розглянемо пряму MK , яка лежить у площині перерізу. Її точка перетину з площиною ABC лежить на прямій AB — це точка H (а точка перетину з ребром BB_1 — точка L).



3. Тоді точка H лежить і в площині перерізу, і в площині ABC . За умовою точка N теж лежить і в площині перерізу, і в площині ABC . Отже, площина перерізу перетинає площину основи по прямій HN (слід січної площини на площині ABC), яка перетинається з прямою BC у точці T .
4. Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник $MNTL$ — шуканий переріз. ◁

1. Зміст задач на побудову в стереометрії. У планіметрії задачі на побудову найчастіше розв'язували з використанням циркуля і лінійки. За їх допомогою можна будувати відповідні фігури площини (прямі, кола, трикутники тощо). Але не існують креслярські інструменти, які дозволяли б у просторі будувати неплоскі фігури. Із цієї причини завдання на побудову в стереометрії за своїм змістом суттєво відрізняються від конструктивних завдань планіметрії. Стереометричні побудови виконують, у першу чергу, у думках. Вони є більше завданнями на доведення існування фігури, що задовольняє дані умови. Це доведення повинно спиратися на відповідні аксіоми та властивості стереометричних фігур.

Задачі на побудову в стереометрії можна умовно поділити на дві групи: задачі на уявлювані побудови (типу: провести площину через пряму і точку поза нею) і задачі на зображеннях просторових тіл — так звані задачі на проєкційному рисунку. Розв'язання стереометричних задач на побудову зазвичай супроводжують рисунками, що можуть бути двох принципово різних типів. Для задач на уявлювані побудови це, як правило, ескізний рисунок, що ілюструє основні етапи побудови. Під час його виконання допускається певна довільність, якщо вона не приводить до суперечностей з умовою задачі (це, наприклад, рисунки 3.3 та 3.5–3.12). Другий тип рисунка до задачі — це плоске зображення на проєкційному рисунку, виконане з використанням властивостей пара-

лельного проектування¹. Побудови на проєкційному рисунку однозначно відповідають просторовим побудовам зображуваної фігури в оригіналі.

2. Задачі на побудову перерізів многогранників. Метод слідів. Під час розв'язування деяких стереометричних задач, пов'язаних із многогранником, доводиться будувати фігуру, що є перетином многогранника з площиною. Якщо такою фігурою є многокутник, то його називають перерізом¹ многогранника. Інакше кажучи,

перерізом многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і площини.

Цю площину ще називають *січною площиною*. У таких задачах зазвичай дано многогранник (тобто зображення многогранника) і потрібно побудувати переріз (тобто зображення перерізу) площиною, яка задана певним чином, найчастіше трьома точками. Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника. Для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).

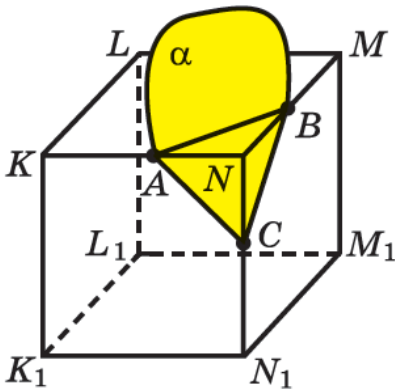


Рис. 4.1

Наприклад, дано зображення куба і три точки A, B, C , які належать ребрам, що виходять з однієї вершини (рис. 4.1). Для побудови перерізу куба площиною α , яка проходить через ці точки, достатньо сполучити їх відрізками.

Дійсно, площина α має з площиною KNN_1K_1 передньої грані куба дві спільні точки A і C . Отже, AC — пряма перетину цих площин, а значить, площина α перетинає передню грань — квадрат KNN_1K_1 по відрізку AC . Аналогічно дана площина α перетинає верхню грань по відрізку AB ,

а бічну грань — по відрізку BC . Отже, трикутник ABC і є шуканим зображенням перерізу куба.

У складніших випадках, для того щоб побудувати переріз многогранника, часто буває зручним побудувати спочатку *пряму перетину січної площини з площиною якоїсь грані* (так званий «слід» січної площини на цій грані), а потім знайти точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (чи з їх продовженнями). Іноді доводиться розглядати певні допоміжні площини, для яких також будують слід січної площини (або слід допоміжної площини на площині якоїсь грані). Цей метод побудови перерізів часто називають *методом слідів*.

Для того щоб отримати слід (тобто пряму b) площини α на площині β (рис. 4.2), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β (оскільки

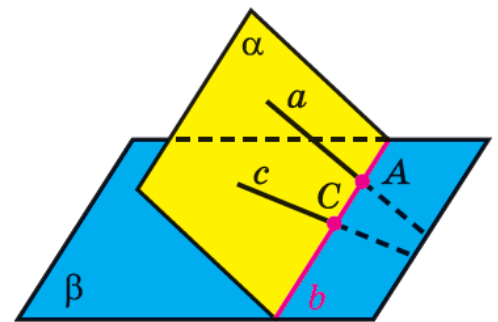


Рис. 4.2

дві точки, наприклад, A і C однозначно визначають пряму b). Відзначимо також, що *точка перетину будь-якої прямої a площини α з площиною β завжди належить сліду площини α на площині β* (тобто прямій b).

Приклад застосування методу слідів для побудови перерізу призми наведено в табл. 5, а методу слідів і допоміжних площин для побудови перерізу піраміди наведено нижче.

Приклад розв'язання задач

Задача*. Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через точки K, L, M (рис. 4.3, *a*), де $L \in AC$, а точки K і M лежать у гранях ABD і BCD відповідно.

Розв'язання¹

▶ Відразу побудувати «слід» площини перерізу на якійсь із граней не можливо. Розглянемо допоміжну площину DKM . Спочатку знайдемо слід цієї площини на площині основи ABC . Для цього знайдемо точки перетину з площиною основи двох прямих DK і DM з допоміжною площини. Оскільки точка K лежить у площині ABD , то пряма DK перетинає пряму AB (а значить, і площину ABC) у деякій точці E (рис. 4.3, *б*). Аналогічно точка F перетину прямої DM з прямою BC є точкою перетину прямої DM з площиною основи. Отже, слід допоміжної площини на площині основи — це пряма EF .

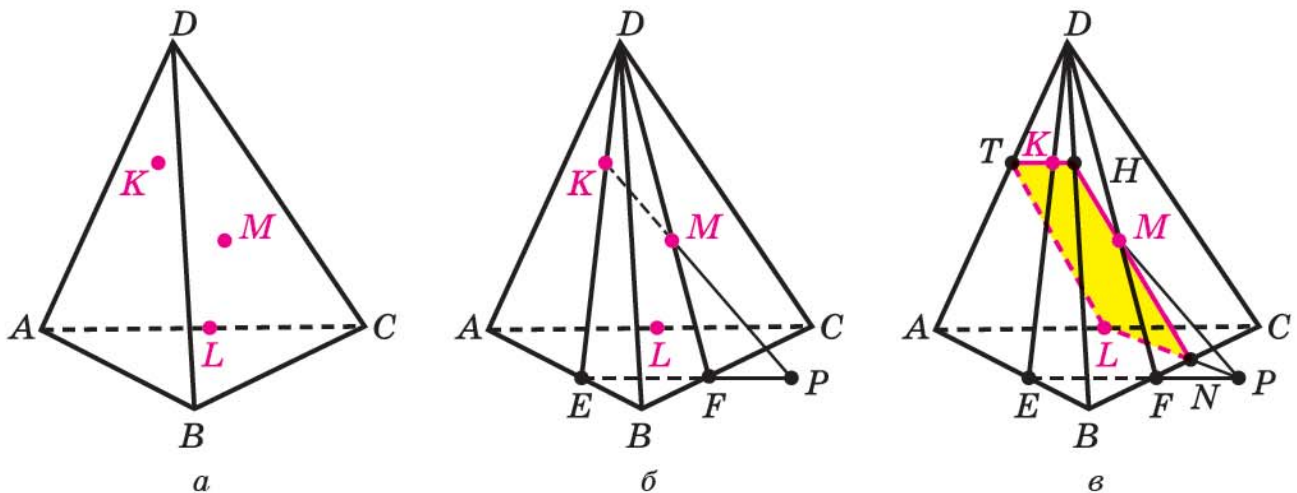


Рис. 4.3

Далі розглянемо в допоміжній площині DKM пряму KM . Оскільки точка перетину прямої KM з площиною основи лежить на прямій EF (на сліді допоміжної площини), то знаходимо точку P перетину прямих KM і EF . Це і буде точка перетину прямої KM з площиною основи ABC .

Точка P лежить у площині перерізу і в площині ABC . Але в цій самій площині лежить і точка L . Отже, площина перерізу перетинає площину

основи по прямій LP (рис. 4.3, *в*), що перетинається з прямою BC в точці N . Тепер можемо послідовно знайти точки перетину площини перерізу з іншими ребрами піраміди. Точки N і M лежать у площині перерізу та в грані BCD . Тоді пряма NM перетинає ребро BD у точці H — це

і буде наступна вершина многокутника перерізу. Аналогічно в площині ABD проводимо пряму HK , яка перетинає ребро AD у точці T , і сполучаємо відрізком точки T і L . Чотирикутник $LNHT$ — шуканий переріз. \triangleleft

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називають перерізом многогранника площиною. Якою фігурою є переріз многогранника?
2. Поясніть, що називають слідом площини α на площині β . Як можна одержати цей слід, маючи декілька прямих у площині α ?
3. Поясніть на прикладі, як можна побудувати переріз многогранника методом слідів.

Вправи

- 1°. Користуючись зображенням куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, наведеним на рисунку 4.4, назвіть: 1) точку перетину прямої MC ($M \in AA_1$) із площиною $B_1 BC_1$; 2) лінію перетину площин $MC_1 C$ і BCB_1 .
- 2°. За зображенням піраміди, наведеним на рисунку 4.5, назвіть: 1) точку перетину прямої MD ($M \in BD$) і площини ABC ; 2) лінію перетину площин MBC і BEC ($E \in AC$).

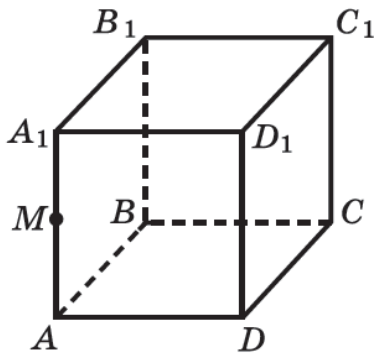


Рис. 4.4

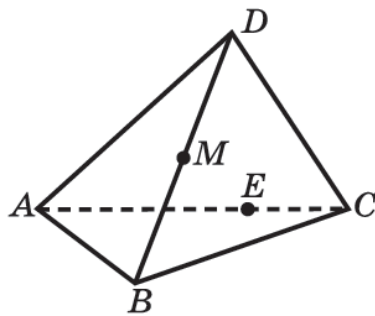


Рис. 4.5

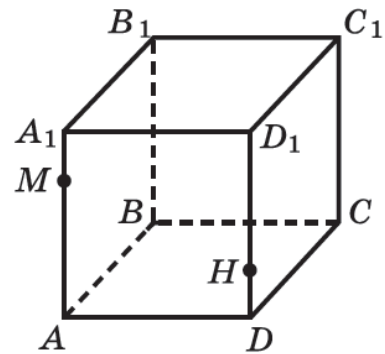


Рис. 4.6

- 3°. Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рисунку 4.6, і побудуйте: 1) точку перетину прямої MH з площиною ABC ; 2) лінію перетину площин MHC і ADC .
- 4°. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рисунку 4.7, і побудуйте: 1) точку перетину прямої MH з площиною ABC ; 2) лінію перетину площин MHB і ABC .
- 5°. Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через: 1) точки A_1 , B і C_1 ; 2) точки B , D і середину ребра CC_1 .