ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ.
АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАСЛІДКИ З НИХ.

План

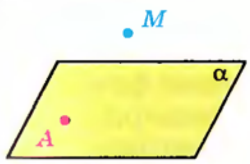
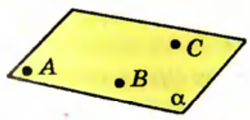
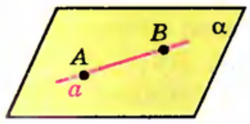
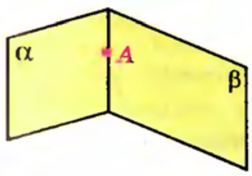
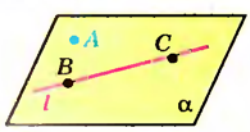
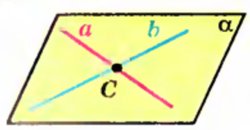
1. Поняття про стереометрію.
2. Основні поняття стереометрії.
3. Аксіоми стереометрії
4. Наслідки аксіом стереометрії.
5. Приклади розв'язування задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. М.І.Бурда, Н.І.Тарасенкова . Геометрія. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.: Київ «Зодіак-ЕКО», 2010, 174 с.

2. Є.П.Нелін. Геометрія. Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів Академічний і профільний рівні. Харків «Гімназія» 2010

3. Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова, В.М. Владіміров. Геометрія 10. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.: Київ «Генеза»,

АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ	
Ілюстрація	**Формулювання**
	**Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.** $A \in \alpha$; $M \notin \alpha$.
	**Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**
	**Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.** Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$.
	**Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.**
	Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.
Наслідки аксіом	
	**Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**
	**Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття про стереометрію. Курс геометрії включає планіметрію і стереометрію. На уроках геометрії в 7–9 класах ви вивчали в основному планіметрію, тобто геометрію на площині. Усі фігури, які розглядають у планіметрії, наприклад трикутник, паралелограм, коло лежать в одній і тій самій площині. Усі точки кожної із цих фігур належать площині. Тому такі фігури називають *плоскими*.

Цього року ми вивчатимемо геометрію в просторі — стереометрію (грецьке слово «стерео» означає просторовий). Таким чином, *стереометрією* називається розділ геометрії, що вивчає просторові фігури та їх властивості. Просторові фігури можуть бути неплоскими (наприклад, куб чи сфера) або плоскими. Усю сукупність точок, які розглядають у стереометрії, називають *простором*. *Фігурою* (або фігурою в просторі) називатимемо довільну множину точок, розташованих у просторі. Зокрема, це всі фігури, розміщені в якій-небудь площині, у тому числі і сама ця площина. Отже, плоскі фігури також є просторовими фігурами. Тому основними властивостями плоских фігур, відомими з курсу планіметрії, ми користуватимемося і в стереометрії.

Проте в стереометрії найважливішими є просторові фігури, що не лежать цілком ні в одній площині, *неплоскі* фігури.

З деякими простими неплоскими фігурами ви ознайомилися в курсі геометрії 9 класу. До них відносять (рис. 3.1): куб (*а*); прямокутний паралелепіпед (*б*); призму (*в*); піраміду (*г*–*ґ*); конус (*д*); циліндр (*е*); кулю (*є*).

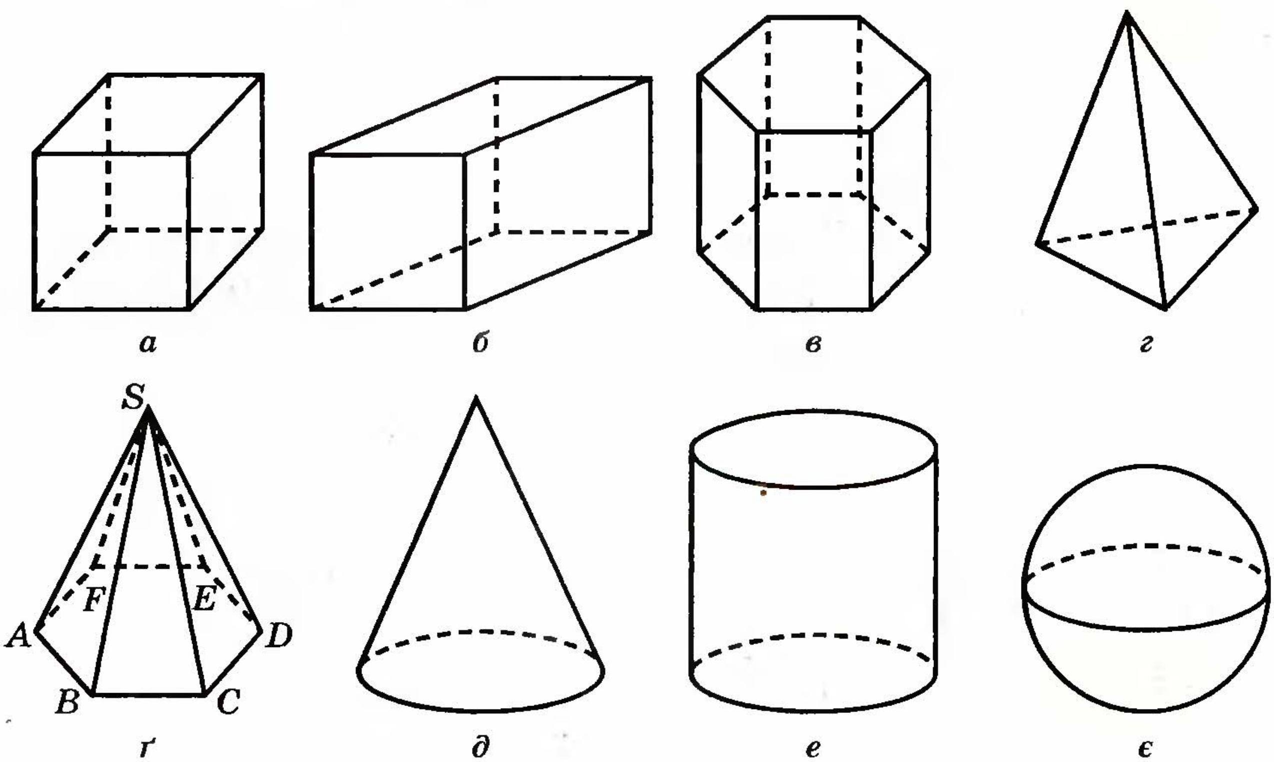


Рис. 3.1

Деякі фігури в просторі ще називають *тілами*[1]. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею. Наприклад, поверхня кулі — *сфера* — складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — центра — на відстань, що *дорівнює радіусу*. Ця поверхня обмежує кулю, яка складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї точки — центра — на відстань, що *не перевищує радіуса*.

Куб, паралелепіпед, призма і піраміда є многогранниками. Строге означення многогранника дамо в 11 класі. Проте оскільки ми почнемо працювати з деякими видами многогранників у 10 класі, то нагадаємо означення, відомі вам з курсу геометрії 9 класу, що спираються на наочно-інтуїтивні уявлення.

Многогранником називатимемо обмежене тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників. Кожний із цих многокутників називають *гранню многогранника*, сторони многокутників — *ребрами многогранника* (рис. 3.2). *Вершинами многогранника* називають вершини його граней. Відрізок, що сполучає вершини многогранника, які не належать одній грані, називають *діагоналлю многогранника*.

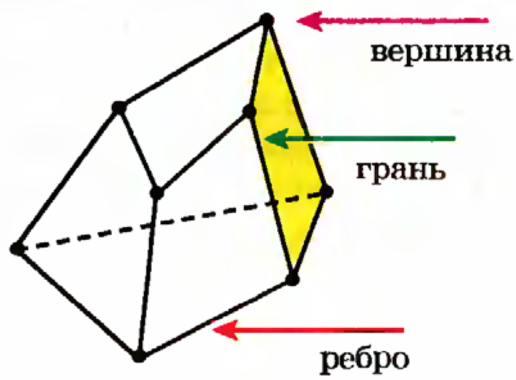


Рис. 3.2

Нагадаємо, що всі грані куба — квадрати, а всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, а всі інші n граней — паралелограми, називають *n-кутною призмою*. Рівні n-кутники називають *основами призми*, а паралелограми — *бічними гранями*. Куб і прямокутний паралелепіпед є частковими випадками чотирикутної призми.

Пірамідою називається многогранник, одна з граней якого плоский многокутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину (див. рис. 3.1, *г–ґ*). Трикутні грані називаються *бічними гранями піраміди*, спільна вершина бічних граней — *вершиною піраміди*, а многокутник — *основою піраміди*. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називаються *бічними ребрами піраміди*. Піраміда називається *n-кутною*, якщо її основою є n-кутник. Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні. Наприклад, якщо в піраміді $SABCDEF$ (див. рис. 3.1, *ґ*) $ABCDEF$ — правильний шестикутник і $SA = SB = SC = SD = SE = SF$, то це правильна шестикутна піраміда.

Трикутну піраміду іноді називають *тетраедром* (див. рис. 3.1, *г*). Тетраедр, усі грані якого — правильні трикутники, називається *правильним*.

[1] Строге означення тіла та його поверхні буде дано в курсі геометрії 11 класу.

2. Основні поняття стереометрії. Основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Як і в курсі планіметрії, точки в просторі будемо позначати великими латинськими буквами A, B, C, D, ..., а прямі — малими латинськими буквами — a, b, c, ... (або двома точками, що лежать на прямій). Площини позначатимемо малими грецькими буквами — α, β, γ, ..., а зображатимемо у вигляді паралелограмів або довільних замкнутих областей (рис. 3.3). Ці способи зображення відповідають наочному уявленню про площину як про гладеньку поверхню стола, озера[1] (рис. 3.4) тощо. При цьому площину уявляють необмеженою в усі боки, ідеально рівною, що не має ніякої товщини.

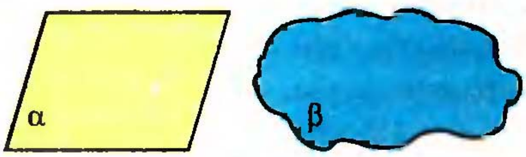


Рис. 3.3

Якщо A — точка площини α, кажуть, що *точка A лежить у площині* α, а *площина α проходить через точку A*. Це можна записати так: $A \in \alpha$. Якщо точка M не належить площині α, то це записують так: $M \notin \alpha$ (рис. 3.5).

Рис. 3.4

Якщо кожна точка прямої a належить площині α, то кажуть, що *пряма a лежить у площині* α, а *площина α проходить через пряму a* (рис. 3.6). Це можна позначати так: $a \subset \alpha$. Якщо пряма b не належить площині α, то це позначають так: $b \not\subset \alpha$.

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, то кажуть, що вони *перетинаються* в точці A, і записують так[2]: $a \cap \alpha = A$. На відповідному рисунку частину прямої, яка «закрита» зображенням площини, вважають невидимою і зображають штриховою лінією (рис. 3.7).

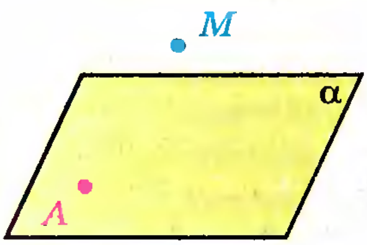


Рис. 3.5

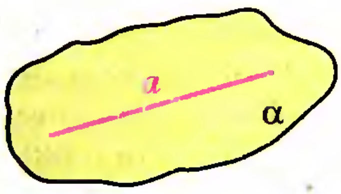


Рис. 3.6

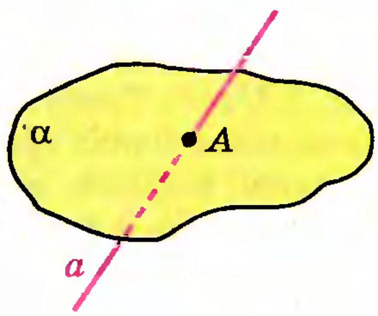


Рис. 3.7

3. Аксіоми стереометрії. У стереометрії, як і в планіметрії, властивості геометричних фігур установлюють шляхом доведення відповідних теорем. Але на початку курсу, коли нам не відомо жодної властивості фігур у просторі, доводиться якісь властивості основних фігур приймати без доведення. Як і в планіметрії, ті властивості основних геометричних фігур, які приймають без доведення, називають *аксіомами.* Нагадаємо, що основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Аксіоми виражають інтуїтивно зрозумілі властивості площин та їх зв'язок з іншими основними фігурами — точками і прямими.

***Аксіома* 1.** **Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.**

***Аксіома* 2.** **Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

***Аксіома* 3.** **Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.**

***Аксіома* 4.** **Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку** (рис. 3.8).

***Аксіома* 5.** **Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.**

У курсі стереометрії ми будемо також вважати, що *для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксіоми планіметрії.*

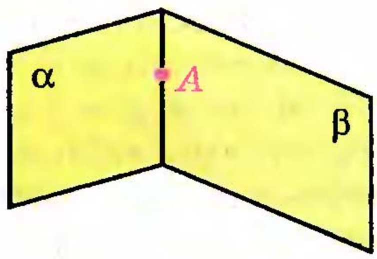


Рис. 3.8

Зокрема, на кожній площині між двома вибраними точками є певна відстань — довжина відрізка, що їх сполучає. Хоча дві точки можуть належати одночасно різним площинам, але за аксіомою 5 відстань між ними на кожній із цих площин буде одна і та сама. Після того як вибрано одиничний відрізок, довжину кожного відрізка можна виразити додатним числом. До цього числа приписують назву одиничного відрізка: 2 см, 1,5 км тощо. Якщо одиничний відрізок не має назви, а довжина відрізка AB дорівнює, наприклад, 5 одиницям довжини, то пишемо: $AB = 5$, що є скороченням запису $AB = 5$ одиниць.

Аксіома про відстані дозволяє порівнювати фігури, розміщені на різних площинах, зокрема, застосовувати до них теореми про рівність і подібність трикутників.

Користуючись поняттям відстані, можна означити рівність і подібність фігур у просторі абсолютно так само, як це було зроблено в планіметрії. Зокрема,

дві фігури називаються *рівними*, якщо існує відповідність[1] між їх точками, при якій відстані між парами відповідних точок рівні[2].

Так само, як і на площині,

дві фігури називаються *подібними*, якщо існує відповідність між їх точками, при якій відстані між відповідними точками змінюються в одне і те саме число разів.

Інакше кажучи, для двох довільних точок X і Y першої фігури і точок X' і Y' другої фігури, які їм відповідають, справедлива рівність $X'Y' = k \cdot XY$.

Надалі аксіому 5 ми, як правило, будемо використовувати неявно, тобто не посилаючись на неї, на відміну від перших чотирьох аксіом.

4. Наслідки аксіом стереометрії. Використовуючи аксіоми стереометрії, за допомогою логічних міркувань установлюють справедливість інших властивостей. Розглянемо деякі з них.

***Теорема* 3.1. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

Доведення. Нехай точка A не лежить на прямій l. Виберемо на прямій l довільні точки B і C (рис. 3.9). Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій l, за аксіомою 2 проходить єдина площина α. За аксіомою 3 пряма l лежить у площині α. Отже, площина α проходить через пряму l і точку A.

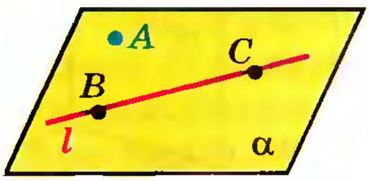


Рис. 3.9

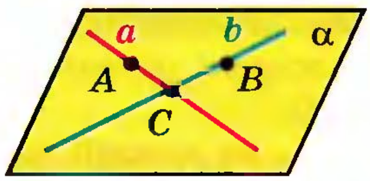


Рис. 3.10

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через пряму l і точку A, проходитиме також через точки A, B, C. За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α.

***Теорема* 3.2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

Доведення. Нехай прямі a і b перетинаються в точці C (рис. 3.10). Виберемо на прямій a довільну точку A, а на прямій b — точку B, від-

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Чи можуть три з них лежати на одній прямій?

Розв'язання

▶ Нехай дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій a (а четверта точка D не лежить на цій прямій).

Тоді через три точки A, B, D, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 можна провести площину α (рис. 3.11). Але за аксіомою 3, якщо дві різні точки A і B прямої a лежать у площині α, то і вся пряма лежить у цій площині, а отже, і точка C теж лежить у площині α. Таким чином, усі чотири точки лежать в одній площині α, що суперечить умові.

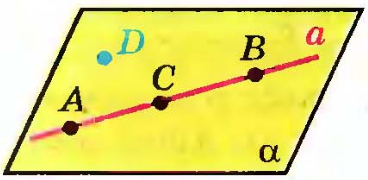


Рис. 3.11

Отже, наше припущення неправильне, і якщо чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій. ◁

Коментар

На запитання «Чи може виконуватися дане твердження?» можна дати відповідь:

«Так», і тоді достатньо навести хоча б один приклад, коли це твердження виконується;

«Ні», і тоді потрібно довести, що це твердження ніколи не виконується (найчастіше це доводять методом від супротивного).

Використовуючи метод *від супротивного*, потрібно:

1) зробити припущення, протилежне тому, що ми хочемо довести;
2) спираючись на аксіоми та вже доведені теореми, отримати суперечність з умовою або з відомою властивістю;
3) зробити висновок, що наше припущення неправильне, а правильне те, що потрібно було довести.

Задача 2*. Доведіть, що **через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму, і до того ж тільки одну.**

Розв'язання

▶ Нехай A і B — дві різні точки простору. Виберемо точку C, яка не лежить на одній прямій з точками A і B (за відповідною аксіомою планіметрії).

Коментар

У планіметрії твердження «Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну» було аксіомою (див. §1). Проте в стереометрії ця аксіома

(Таке доведення, а також уточнені формулювання інших аксіом планіметрії див. у § 5.)

Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проведемо площину α. У площині α за відповідною аксіомою планіметрії через точки A і B можна провести пряму a. Припустимо, що в просторі через точки A і B можна провести ще одну пряму a_1, відмінну від прямої a. За аксіомою 3 пряма a_1 лежить у площині α (оскільки дві її точки A і B лежать у площині α). Тоді в площині α через дві різні точки A і B проведено дві різні прямі a і a_1, що суперечить відповідній аксіомі планіметрії.

Отже, через дві різні точки в просторі можна провести тільки одну пряму. ◁

стверджує тільки те, що *в розглядуваній площині через дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну*.

Відповідний факт у просторі потребує доведення. Для цього слід використати додатково таку аксіому планіметрії: «*Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй*».

Ця аксіома і в просторі гарантує існування точок, які не належать даній прямій.

Задача 3. Дано пряму і точку, що не лежить на ній. Доведіть, що **всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать в одній площині.**

Розв'язання

▶ Нехай дано пряму a в просторі і точку B, яка не лежить на ній. Через пряму a і точку B проведемо площину α (за теоремою 3.1 ця площина єдина). Нехай довільна пряма b проходить через точку B і перетинає пряму a в точці A (рис. 3.12). Тоді точки A і B прямої b належать площині α, отже, за аксіомою 3 і вся пряма b лежить у площині α.

Таким чином, усі прямі, які перетинають дану пряму a і проходять через дану точку B, що не лежить на ній, лежать в одній площині α. ◁

Коментар

Спочатку побудуємо площину, яка проходить через дані пряму і точку. Потім доведемо, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать у цій площині.

Для коректного доведення слід також упевнитися, що побудована площина єдина.

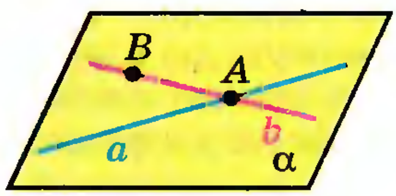


Рис. 3.12

Запитання для контролю

1. Наведіть приклади просторових фігур, плоских фігур, неплоских фігур. Яке мінімальне число точок може містити неплоска фігура?
2. Назвіть основні поняття стереометрії. Сформулюйте аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них.
3*. Дайте означення рівності та подібності фігур у просторі.
4*. Доведіть, що через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
5*. Доведіть, що через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Вправи

1°. Поясніть, чому стіл, який має три ніжки, обов'язково стійкий, а про стіл із чотирма ніжками цього стверджувати не можна.

2°. (*Жарт.*) Три мухи одночасно злетіли з кришки стола. Чи можуть вони знову опинитися в одній площині?

3°. Як можна перевірити якість виготовлення лінійки, якщо є гарно оброблена плоска плита? На який теоретичний факт спирається ця перевірка?

4°. Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? Відповідь поясніть, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

5°. Скільки площин може проходити через три дані точки?

6. Доведіть, що площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці.

7. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає дану площину.

8. Точка M належить площині α, а точка N не належить їй. Чи належить площині α середина відрізка MN? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

9. Чи правильно, що можна провести площину через будь-які: 1) дві точки; 2) три точки; 3) чотири точки? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

10°. Скільки площин можна провести через одну пряму? Обґрунтуйте свою відповідь.

11°. Чи можуть дві площини мати: 1) тільки одну спільну точку; 2) тільки дві спільні точки?

12°. Чи можуть дві різні площини мати дві різні спільні прямі?

13°. Столяр за допомогою двох ниток перевіряє, чи буде стійко стояти на полу виготовлений стіл, який має чотири ніжки. Як потрібно натягнути ці нитки?

14. Як розташовані дві площини, якщо в кожній із них лежить один і той самий трикутник?