# ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ.

План

1. Використання координат для розв’язування геометричних задач.
2. Переклад геометричних фактів на векторні мову і векторних співвідношень на геометричну мову.
3. Схема розв’язування геометричних задач векторним методом.
4. Використання векторів для розв’язування геометричних задач.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. М.І.Бурда, Н.І.Тарасенкова . Геометрія. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.: Київ «Зодіак-ЕКО», 2010, 174 с.

2. Є.П.Нелін. Геометрія. Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів Академічний і профільний рівні. Харків «Гімназія» 2010

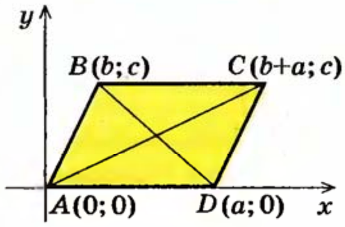
3. Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова, В.М. Владіміров. Геометрія 10. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.: Київ «Генеза»,

## ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

### 1. Використання координат для розв’язування геометричних задач

**Приклад 1. Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.**

***Розв’язання***



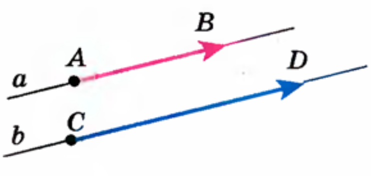
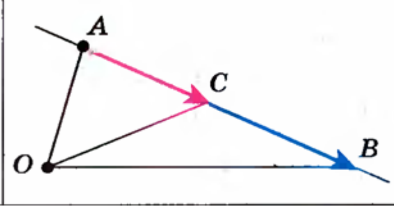

**Уведемо систему координат так, як її зображено на рисунку. Точка $A$ має координати $(0;\ 0)$. Якщо позначити координати точки $B(b; c)$, а координати точки $D(a; 0)$, то координати точки $C$ будуть $(b + a; c)$ (поясніть чому). Запишемо в координатах суму квадратів діагоналей і суму квадратів усіх сторін:**

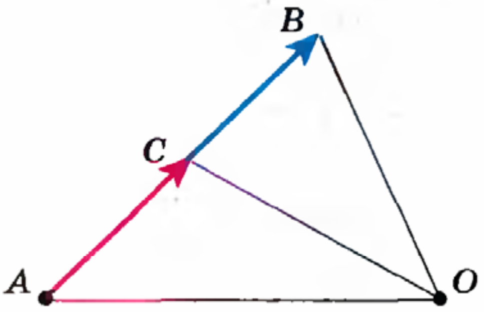
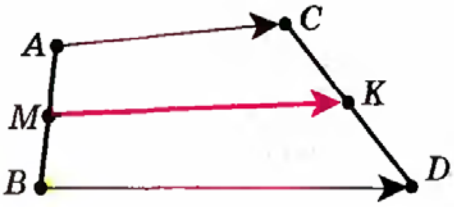
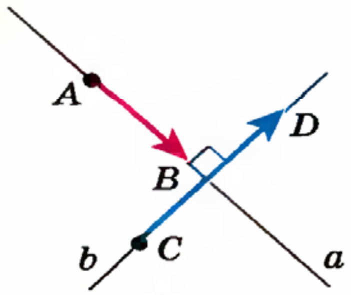
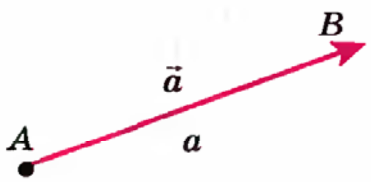
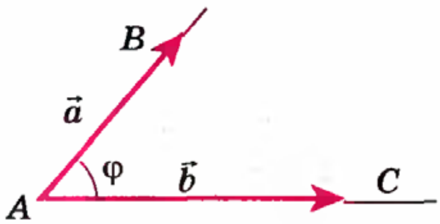
$$AC^2 + BD^2 = (b + a)^2 + c^2 + (b - a)^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2 + 2c^2;$$

$$2AB^2 + 2AD^2 = 2(b^2 + c^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2c^2 + 2a^2.$$

**Як бачимо, $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, що і потрібно було довести.**

### 2. Переклад геометричних фактів на векторну мову і векторних співвідношень на геометричну мову

| № з/п | Рисунок | Твердження геометричною мовою | Твердження векторною мовою |
|---|---|---|---|
| 1 |   | Прямі паралельні $a \parallel b$ (прямі $a$ і $b$ не збігаються) | Вектори колінеарні $\overline{AB} = \lambda\overline{CD}$ $\left(\frac{CD}{AB} = \lambda\right)$ |
| 2 |   | $C \in AB$ $\left(\frac{AB}{AC} = \lambda\right)$ | Вектори колінеарні $\overline{AB} = \lambda\overline{AC}$ або $\overline{OC} = p\overline{OA} + (1 - p) \cdot \overline{OB}$ |

| № з/п | Рисунок | Твердження геометричною мовою | Твердження векторною мовою |
|---|---|---|---|
| 3 |  | $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$ | а) $\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$; |
| | | **Точка $C$ — середина $AB$** $\left(\frac{AC}{CB}=1\right)$ | б) $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ |
| 4 |  | Точка $M$ — середина $AB$, точка $K$ — середина $CD$ | $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$ |
| 5 |  | $a \perp b$ | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ $(\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}, \overrightarrow{CD}\neq\vec{0})$ |
| 6 |  | $AB=a$ | $\vec{a}^2=\lvert\vec{a}\rvert^2$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\lvert\vec{a}\rvert=a$. **У координатах:** $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_a^2+y_a^2}$, $\vec{a}=(x_a;y_a)$ |
| 7 |  | $\angle BAC=\varphi$ | $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$, де $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\varphi$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ |

### 3. Схема розв'язування геометричних задач векторним методом

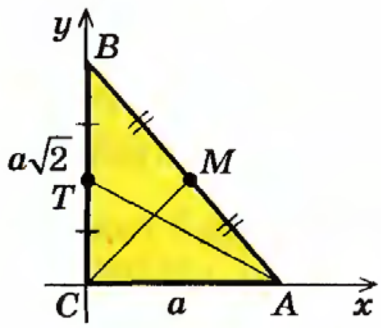
1. **Перекласти вимогу задачі на векторну мову** (для цього можна користуватися співвідношеннями, наведеними на с. 27–28).
2. **Увести прямокутну систему координат** або *вибрати два неколінеарних вектори на площині як основні* (базисні).
3. **Знайти координати векторів, виділених у пункті 1,** або *виразити ці вектори через основні.*
4. **Довести або знайти виділене у пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову** (для перекладу знову скористаємося співвідношеннями, наведеними на с. 27–28).

### 4. Використання векторів (у координатній формі) для розв'язування геометричних задач

**Приклад 2.** У прямокутному трикутнику $ABC$ ($\angle C = 90°$) $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Доведіть, що медіани, проведені з вершин $A$ і $C$, взаємно перпендикулярні.

*Розв'язання*

1. Якщо $AT$ і $CM$ — медіани даного прямокутного трикутника, то *для доведення їх перпендикулярності достатньо довести, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю*, тобто довести, що $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{CM}=0$.
2. *Уведемо систему координат* так, як зображено на рисунку. Тоді точки $A$, $C$, $B$, $T$, $M$ ($T$ — середина $CB$, $M$ — середина $AB$) мають координати: $A\ (a;\ 0\ )$, $C\ (0;\ 0)$, $B\ (0;\ a\sqrt{2})$, $T\left(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{a}{2};\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.




3. *Запишемо координати векторів, виділених у пункті* 1:
$$\overrightarrow{AT}=\left(-a;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{CM}=\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$
4. *Знайдемо скалярний добуток цих векторів:*
$$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{CM}=-a\cdot\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0.$$

Але ця рівність і означає, що вектори $\overrightarrow{AT}$ і $\overrightarrow{CM}$ перпендикулярні, тобто медіани $AT$ і $CM$ взаємно перпендикулярні.

## Пояснення й обґрунтування

Уведення координат та векторів для розв'язування геометричних задач дозволяє скласти аналітичну модель даної задачі й використати потужний потенціал курсу алгебри для дослідження цієї моделі. Як правило, це дає змогу уникнути специфічних додаткових побудов, які часто доводиться виконувати, розв'язуючи задачі геометричними методами.

Для розв'язання геометричної задачі координатним методом:

1) уводимо прямокутну систему координат;
2) записуємо координати даних точок;
3) записуємо в координатах дані та шукані співвідношення, які пов'язані з умовою і вимогою задачі, та аналізуємо одержані співвідношення з метою отримання відповіді на запитання задачі.

Приклад застосування координат до розв'язування геометричної задачі наведено в пункті 1 табл. 3.

Слід ураховувати, що координатний чи векторний методи зручно використовувати тоді, коли після введення системи координат або основних векторів (так званих *базисних векторів*, через які виражають усі інші вектори) легко записати всі геометричні співвідношення, дані умовою та вимогою задачі. Частину таких співвідношень у координатній та векторній формах наведено в табл. 13 додатку, а частину — у пункті 2 табл. 3. У пункті 3 цієї таблиці наведено схему розв'язування геометричної задачі векторним (чи векторно-координатним) методом, а в пункті 4 — застосування запропонованої схеми.

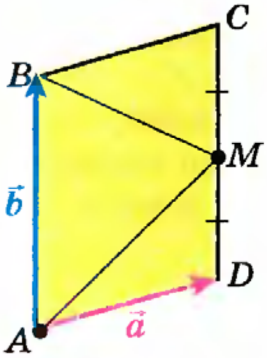


Рис. 2.1

## Приклади розв'язання задач

**Задача.** У паралелограмі $ABCD$ (рис. 2.1) $AB = 2BC$ і точка $M$ — середина сторони $CD$. Довести, що відрізки $AM$ і $BM$ перпендикулярні.

| *Розв'язання* | *Коментар* |
|---|---|
| ► Щоб довести, що відрізки $AM$ і $BM$ перпендикулярні, достатньо довести, що скалярний добуток векторів $\overline{AM}$ і $\overline{BM}$ дорівнює нулю.<br>Виберемо основні вектори:<br>$\overline{AD}=\vec{a}$ і $\overline{AB}=\vec{b}$.<br>Виразимо потрібні нам вектори $\overline{AM}$ | Спробуємо розв'язати цю задачу векторним методом (без уведення системи координат). Для цього використаємо схему розв'язування, наведену в пункті 3 табл. 3:<br>1) *перекласти вимогу задачі на векторну мову* (враховуючи співвідношення 5, наведені в |

і $\overrightarrow{BM}$ через основні. Оскільки точка $M$ — середина $DC$, то $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ і $\overrightarrow{BM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BM}$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a}^{\,2} - \frac{1}{4}\vec{b}^{\,2}.$$

Але $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, $\vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^2$. Враховуючи, що за умовою $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, одержуємо: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, отже, відрізки $AM$ і $BM$ перпендикулярні. ◁

пункті 2 табл. 3, достатньо довести, що $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$);

2) *вибрати два неколінеарних вектори на площині як основні* (найчастіше вибирають такі, що виходять з однієї точки);

3) *виразити вектори, виділені в пункті 1, через основні;*

4) *довести або знайти виділене в пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову* (для перекладу знову скористатися співвідношеннями пункту 2 табл. 3).

### Запитання для контролю

1. Укажіть основні етапи розв'язування геометричної задачі координатним та векторним методами.
2. Наведіть приклади розв'язування геометричної задачі координатним і векторним методами.

## Вправи

1°. На рисунку 2.2 зображено прямокутний трикутник з катетами $a$ і $b$ ($a > b$). Виберіть систему координат так, щоб початок координат розміщувався у вершині прямого кута, а дві інші вершини — на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника. Запишіть координати середин його сторін.

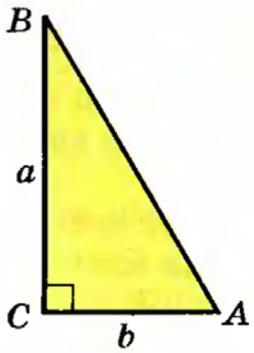



Рис. 2.2

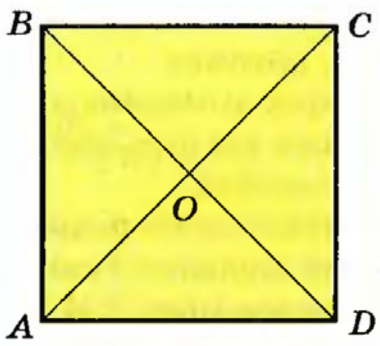



Рис. 2.3

2. На рисунку 2.3 зображено квадрат зі стороною $a$. Виберіть систему координат так, щоб: 1°) три вершини квадрата розміщувалися на

осях координат; 2) усі вершини квадрата розміщувалися на осях координат. Запишіть координати вершин квадрата і точки перетину його діагоналей.

3. На рисунку 2.4 зображено рівнобедрений трикутник з основою $2a$ і висотою $b$. Виберіть систему координат так, щоб усі його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати вершин трикутника і середин його сторін.
4. На рисунку 2.5 зображено прямокутник зі сторонами $a$ і $b$. Виберіть систему координат так, щоб три його вершини розміщувалися на осях координат. Запишіть координати вершин прямокутника і точки перетину його діагоналей.
5. На рисунку 2.6 зображено ромб з діагоналями $2a$ і $2b$. Виберіть систему координат так, щоб початок координат розміщувався в точці перетину діагоналей, а всі вершини — на осях координат. Запишіть координати вершин ромба.

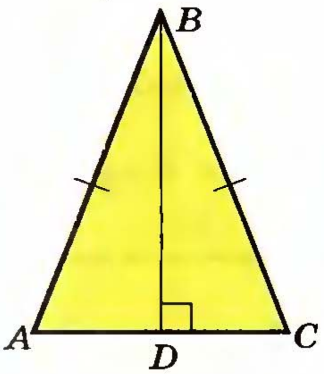


Рис. 2.4

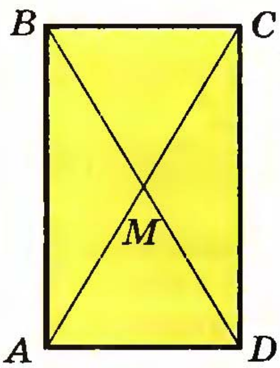


Рис. 2.5

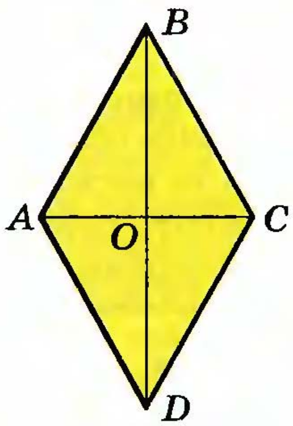


Рис. 2.6

6. За допомогою координат доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від усіх його вершин.
7. За допомогою координат доведіть, що сума квадратів відстаней від точки, узятої на діаметрі кола, до кінців будь-якої паралельної йому хорди, постійна.
8. У квадрат зі стороною 2 вписано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до всіх вершин квадрата є величина постійна.

9*. За допомогою координат доведіть, що в трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін плюс подвоєний добуток основ (рис. 2.7).

10*. (*Теорема Ейлера.*) За допомогою координат доведіть, що сума квадратів довжин сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей плюс почетверений квадрат відстані між серединами діагоналей.