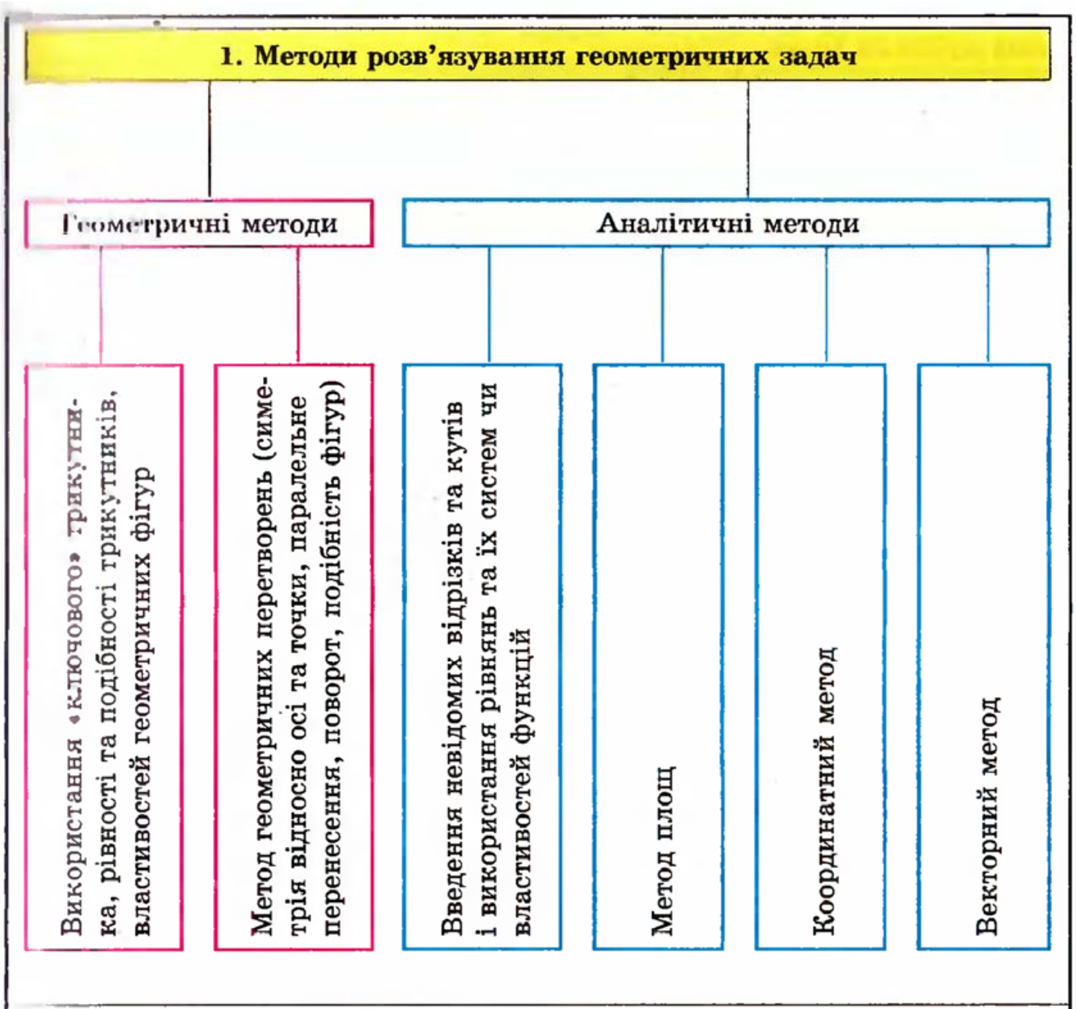
ГЕОМЕТРИЧНІ ТА АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ.

План

1. Методи розв'язування геометричних задач.
2. Введення невідомих для розв'язування геометричних задач на обчислення.
3. Використання методу площ для розв'язування геометричних задач.

ЛІТЕРАТУРА

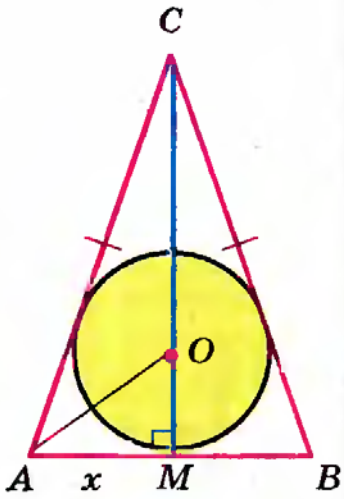
1. М.І.Бурда, Н.І.Тарасенкова . Геометрія. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.: Київ «Зодіак-ЕКО», 2010, 174 с.
2. Є.П.Нелін. Геометрія. Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів Академічний і профільний рівні. Харків «Гімназія» 2010
3. Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова, В.М. Владіміров. Геометрія 10. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.: Київ «Генеза»,



2. Введення невідомих для розв'язування геометричних задач на обчислення

Орієнтир

Якщо умовою геометричної задачі на обчислення взагалі не дано відрізки або дані відрізки та кути не можна об'єднати в зручний для розв'язування задачі трикутник, то зазвичай вводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих).

<table>
<tr><th colspan="2">Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 25 см. Обчисліть площу цього трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 10 см.</td></tr>
<tr><td>План</td><td>Розв'язання і коментар</td></tr>
<tr><td>1. Позначимо якоюсь буквою, наприклад x, невідомий відрізок (або кут, або кілька невідомих).</td><td>Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = CB$) медіана $CM = 25$ см (яка є і бісектрисою, і висотою) та радіус вписаного кола $OM = 10$ см. Ці відрізки не є сторонами одного трикутника. Тому для розв'язання задачі виберемо який-небудь відрізок як невідомий. Необхідно, щоб вибраний відрізок разом із даними відрізками утворював зручні для розв'язування трикутники.


Нехай $AM = x$, де $x > 0$. Цей відрізок можна об'єднати в прямокутні трикутники і з медіаною CM, і з радіусом OM.</td></tr>
<tr><td>2. Спробуємо скласти рівняння (чи систему) з уведеним невідомим.</td><td>Із $\Delta\, AMC$: $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 25^2} = \sqrt{x^2 + 625}$. Щоб скласти рівняння, скористаємось тим, що центр вписаного кола лежить у точці перетину бісектрис: AO — бісектриса кута BAC. Тоді AO є також і бісектрисою $\Delta\, AMC$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника (див. пункт 3 табл. 2) $\frac{AC}{AM} = \frac{CO}{OM}$, тобто $\frac{\sqrt{x^2 + 625}}{x} = \frac{15}{10}$.</td></tr>
<tr><td>3. Розв'язуємо одержане рівняння (чи систему рівнянь) або перетворюємо його (її) таким чином, щоб дістати відповідь на запитання задачі). З одержаних розв'язків вибираємо ті, які задовольняють умові геометричної задачі.</td><td>Підносячи обидві частини одержаного рівняння до квадрата та розв'язуючи останнє рівняння, отримуємо: $x^2 = 500$. Звідси
$$x = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}.$$
(Оскільки $x > 0$, то другий корінь одержаного рівняння $x = -\sqrt{500} = -10\sqrt{5}$ не задовольняє умові задачі, і його не записують до розв'язання).</td></tr>
</table>

5. *Користуючись знайденою величиною, дамо відповідь на запитання задачі.*	Тоді $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CM=AM\cdot CM=25x=250\sqrt{5}$ (см²). *Відповідь.* $250\sqrt{5}$ см².

3. Використання методу площ для розв'язування геометричних задач

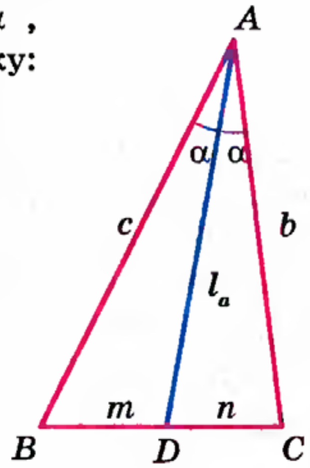
Зміст деяких варіантів методу площ

Розбити даний многокутник на частини і записати окремо площу всього многокутника і окремо суму площ його частин та прирівняти одержані величини.

Щоб знайти відношення відрізків, розміщених на одній прямій, іноді буває корисним замінити відношення відрізків відношенням площ трикутників зі спільною вершиною, основами яких є розглядувані відрізки.

Приклад

Доведіть, що **бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін трикутника.**

План	*Розв'язання*
Щоб знайти відношення відрізків BD і DC, спробуємо знайти відношення площ трикутників ABD і ACD зі спільною вершиною A, основами яких є дані відрізки (тоді, і висота цих трикутників, проведена з вершини A, буде спільною).	Нехай $AD = l_a$ — бісектриса трикутника ABC зі сторонами $AB = c$, $AC = b$ і $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$, $BD = m$, $DC = n$. Тоді, з одного боку: $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}cl_a\sin\alpha,\quad S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}bl_a\sin\alpha$ і $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}cl_a\sin\alpha}{\frac{1}{2}bl_a\sin\alpha}=\frac{c}{b}$. (1)  З іншого боку: $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}mh_a$, $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}nh_a$ і $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}mh_a}{\frac{1}{2}nh_a}=\frac{m}{n}$. (2) Прирівнюючи праві частини виразів (1) і (2), одержуємо $\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$, що і потрібно було довести.

Пояснення й обґрунтування

У курсі планіметрії 7–9 класів ви розглянули значну кількість геометричних задач та їх розв'язань різними методами. Дамо короткий огляд розглянутих типів задач та методів їх розв'язування.

За вимогою геометричної задачі їх можна поділити на такі типи: на доведення, на обчислення, на побудову, на дослідження. Задачі кожного із цих типів розв'язують різними методами, які умовно поділяють на геометричні та аналітичні (див. пункт 1 табл. 2).

Нагадаємо, що значна частина теорем курсу планіметрії стосувалася геометрії трикутника. Це не випадково, оскільки розв'язування багатьох задач зводиться до розгляду одного чи декількох трикутників. Тому, говорячи про геометричні методи розв'язування планіметричних задач, можна умовно виділити метод «ключового» трикутника. За цим методом у даній фігурі потрібно знайти трикутник (або декілька трикутників), до дослідження якого (яких) зводиться розв'язування задачі. Інколи з цією метою спочатку слід виконати якусь додаткову побудову, наприклад у чотирикутнику провести діагональ.

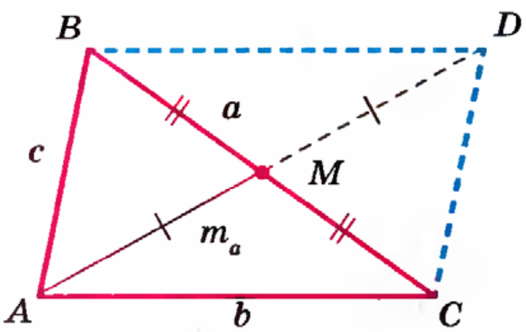


Рис. 1.13

Деякі з часто використовуваних додаткових побудов корисно пам'ятати. Зокрема, *якщо в умові задачі фігурує медіана трикутника, то буває зручним продовжити цю медіану за сторону на таку саму відстань і доповнити рисунок до паралелограма*. Наприклад, у трикутнику ABC зі сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 1.13) продовжимо медіану AM за сторону BC на відстань ($MD = AM = m_a$) та з'єднаємо відрізками точку D з точками B і C. Тоді отримаємо паралелограм $ABDC$, оскільки його діагоналі в точці перетину діляться навпіл (табл. 7 додатку). Але *сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін*:

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AC^2 + AB^2), \text{ або } (2m_a)^2 + a^2 = 2\,(b^2 + c^2).$$

Звідси

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Іноді додаткові побудови здійснюють, використовуючи певні геометричні перетворення (див. табл. 5 додатку). Наприклад, *розв'язуючи задачі, пов'язані з трапецією, часто буває зручним використати паралельне перенесення її бічної сторони або діагоналі* (див. у табл. 10 додатку другу і третю додаткові побудови).

Розв'язуючи геометричні задачі на доведення, слід пам'ятати, що твердження деяких з них доводять *методом від супротивного*. Нагадаємо його зміст:

1. *Робимо припущення, протилежне тому, що потрібно довести.*
2. *Спираючись на аксіоми та теореми, отримуємо з припущення наслідок, який суперечить умові або відомій властивості.*
3. *Робимо висновок, що наше припущення неправильне, а правильне твердження, що потрібно довести.*

Використовуючи метод доведення від супротивного, як правило, рисунок виконують до тієї геометричної ситуації, яка випливає з припущення. Наприклад, розв'язання задачі «Доведіть, що на площині *пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу пряму*» може бути таким.

● 1) Нехай прямі a і b паралельні. Припустимо, що пряма c, що перетинає пряму a в точці A, не перетинає пряму b (рис. 1.14).

2) Отже, пряма c паралельна прямій b. Але тоді через точку A проходять дві прямі a і c, паралельні прямій b, що суперечить аксіомі паралельних.

3) Таким чином, наше припущення неправильне, і пряма c обов'язково перетне і пряму b. ○

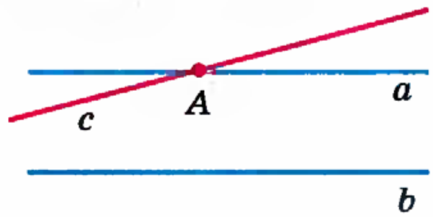


Рис. 1.14

Приступаючи до розв'язування геометричної задачі, слід ураховувати, що майже кожна геометрична задача потребує індивідуального підходу, винахідливості та інтуїції. Проте можна дати деякі загальні рекомендації, що будуть корисні під час розв'язування багатьох задач.

Розв'язування практично будь-якої геометричної задачі починають з рисунка. Він повинен бути досить лаконічним. *Слід зображати лише «функціонуючі» частини геометричних фігур.* Так, наприклад, якщо в задачі розглядають радіус описаного кола, то часто можна не зображати коло (а зобразити тільки його центр і радіус). Але якщо в умові задачі йдеться про точку кола, то його зображення може бути корисним для розв'язання. *Необхідно уникати надмірного ускладнення рисунка.* Для цього можна, наприклад, виконати виносні рисунки, що зображають фрагменти даної конфігурації. З іншого боку, корисно безпосередньо на рисунку вказувати числові чи буквені значення лінійних або кутових величин. Зазначимо, що є такі задачі, у процесі розв'язування яких доводиться уточнювати особливості конфігурації, що розглядається, та переробляти початковий рисунок таким чином, що остаточного вигляду він набуває лише одночасно із закінченням розв'язування.

Розв'язуючи геометричну задачу, треба спиратися не лише на рисунок. Він може «підказати», що якісь точки лежать на одній прямій чи на одному колі. Проте в процесі розв'язування ці особливості розміщення точок повинні бути обґрунтовані без посилань на рисунок. Інколи рисунок може стати причиною неповного розв'язування задачі, оскільки ті співвідношення, які виконують на ньому і здаються очевидними, насправді потребують спеціального обґрунтування. Тому завжди намагайтеся зобразити всі можливі конфігурації, а потім за допомогою міркувань відкинути зайві (якщо ці зайві дійсно є). Нагадаємо, що додаткові побудови на початковому рисунку, якими вводять нові відрізки та кути, іноді полегшують розв'язування задачі.

У задачах на обчислення має сенс спочатку, не проводячи обчислень, визначити, які взагалі відрізки та кути можна знайти, виходячи з даних величин. Як тільки до цього переліку потрапить потрібний відрізок чи кут, можна легко скласти ланцюжок послідовних обчислень, що приведе до визначення шуканої величини. Іноді такий «прямий пошук» корисно доповнити пошуком плану розв'язування задачі «від шуканого», тобто виходячи з вимоги задачі (наприклад, «щоб знайти площу вписаного круга, достатньо знайти його радіус»).

Проте ці способи не завжди вдається застосувати. У таких випадках дуже часто допомагає алгебраїчний метод розв'язування геометричних задач на обчислення, пов'язаний із введенням невідомих та складанням рівняння або системи рівнянь. У пункті 2 табл. 2 наведено орієнтир, який дає змогу розпізнавати ситуації, коли потрібно вводити невідомі відрізки та кути, а також приклад відповідного розв'язання. Використовуючи цей метод *для складання рівняння до задачі, часто поряд з вираженням даних елементів через невідомі зручно величину якогось елемента з розглядуваної конфігурації виразити двічі через введені невідомі.* Крім того, не завжди, *склавши рівняння чи систему рівнянь до геометричної задачі,* доцільно *прагнути повністю їх розв'язати. З одержаного рівняння чи системи, у першу чергу, слід знаходити ті невідомі (чи їх комбінацію), які дозволять дати відповідь на запитання задачі* (див. розв'язання задачі 2 на с. 23).

У табл. 2 (пункт 3) показано можливість використання методу площ для розв'язування планіметричних задач. Зміст та приклади застосування координатного та векторного методів для розв'язування геометричних задач розглянуто в § 2.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. У рівнобічній трапеції висота дорівнює 8 см, основи дорівнюють 21 см і 9 см. Знайдіть радіус описаного навколо трапеції кола.

Розв'язання	Коментар

▶ Нехай у трапеції $ABCD$ (рис. 1.15) $AB = CD$, $AD = 21$ см, $BC = 9$ см, $BK = 8$ см ($BK \perp AD$). Якщо коло проходить через чотири точки A, B, C, D, то воно також проходить через будь-які три із цих точок і тому збігається з колом, описаним навколо трикутника ABD.

Знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника ABD. Якщо CM — друга висота даної рівнобічної трапеції, то, ураховуючи рівність прямокутних трикутників ABK та DCM і те, що $AD \parallel BC$ і $BCMK$ — прямокутник, одержуємо:

$$AK = MD = \frac{21-9}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Тоді з ΔABK:

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10 \text{ (см)}.$$

З прямокутного трикутника BKD:

$$BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Таким чином, радіус кола, описаного навколо трикутника ABD (а отже, і навколо трапеції $ABCD$), дорівнює

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\Delta ABD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK} = 10{,}625 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 10,625 см. ◁

Спробуємо виділити «ключовий» трикутник для розв'язування задачі. Для цього проведемо діагональ BD трапеції і згадаємо, що коло, яке проходить через вершини трикутника ABD, є описаним навколо трикутника. Обчислити його радіус можна за кількома формулами (табл. 11 додатку), зокрема:

$$R = \frac{a}{2\sin A} \quad \text{та} \quad R = \frac{abc}{4S_\Delta}.$$

Із цих формул вибираємо ту, для якої легко знайти всі величини, що входять до її запису: $R = \frac{abc}{4S_\Delta}$. (Одну сторону трикутника ABD дано за умовою, а дві інші легко визначити з відповідних прямокутних трикутників.)

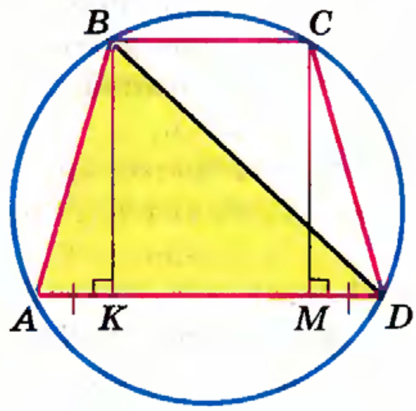


Рис. 1.15

Задача 2. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а його площа — 24 см². Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання	Коментар

▶ Нехай у прямокутному трикутнику ABC (рис. 1.16): $\angle C = 90°$, $P = 24$ см, $S = 24$ см².

Оскільки в умові цієї геометричної задачі на обчислення не дано жодного відрізка, для розв'язування такої

Позначимо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

Записуючи дані периметр і площу та теорему Піфагора, одержуємо систему

$$\begin{cases} a+b+c=24, \\ \frac{1}{2}ab=24, \\ a^2+b^2=c^2. \end{cases}$$

З першого рівняння $a + b = 24 - c$. Тоді

$$(a+b)^2=(24-c)^2$$

або

$$a^2+b^2+2ab=24^2-48c+c^2.$$

Підставляючи в цю рівність з другого рівняння $ab = 48$ і з третього рівняння $a^2+b^2=c^2$, одержуємо

$$c^2+96=576-48c+c^2,$$

звідки $c = 10$ (см). Оскільки радіус описаного кола прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то $R = 5$ см.

Відповідь: 5 см. ◁

задачі доведеться ввести невідомий відрізок (або декілька невідомих відрізків). Щоб записати периметр трикутника, потрібно мати всі його сторони, тому введемо як невідомі всі сторони трикутника: a, b, c. Для складання рівнянь використаємо теорему Піфагора та дані периметр і площу (записавши їх через невідомі). Оскільки *в прямокутному трикутнику радіус описаного кола дорівнює половині гіпотенузи* (табл. 11 додатку), то, щоб одержати відповідь, достатньо знайти із системи гіпотенузу c, а для цього з першого рівняння системи знайти суму $a + b$, піднести її до квадрата і використати друге та третє рівняння.

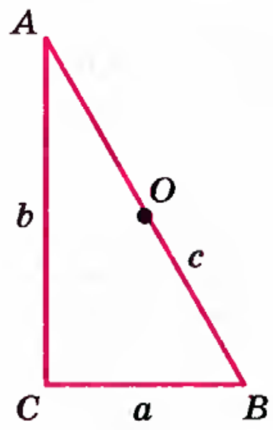


Рис. 1.16

Запитання для контролю

1. Назвіть основні поняття планіметрії.
2. Скільки прямих можна провести через дві різні точки площини? Наведіть відповідну аксіому.
3. Чи завжди через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині пряму, паралельну даній? Скільки таких прямих можна провести? Наведіть відповідну аксіому.
4. Поясніть зміст поняття «обернена теорема» і наведіть приклади прямої та оберненої теорем. Наведіть приклад теореми, яка не має оберненої, та поясніть, чому її немає.

5*. На прикладі твердження: *«Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм»* поясніть зміст понять «необхідна умова», «достатня умова». Сформулюйте дане твердження, використовуючи терміни: а) «необхідно»; б) «достатньо». Чи можна поєднати умову і висновок наведеного твердження терміном «необхідно і достатньо»? Якщо можна, то поясніть чому.

6. У яких випадках для розв'язування геометричної задачі на обчислення зручно вводити невідомі? Поясніть це на прикладі.

7. Поясніть, як можна використовувати метод площ для розв'язування геометричної задачі. Наведіть приклад.

Вправи

1°. У табл. 4 додатку (с. 210) символічно зафіксовано наслідки теореми косинусів. Сформулюйте ці наслідки словесно.

2°. Визначте вид (за кутами) трикутника зі сторонами 6 см, 8 см і 11 см.

3°. Дано два рівнобедрених трикутники зі спільною основою. Доведіть, що їх медіани до основи лежать на одній прямій.

4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 12, а кут, протилежний до основи, — 120°. Знайдіть висоти трикутника.

5°. У рівнобедреному трикутнику основа і висота, проведена до основи, дорівнюють 4 см. Знайдіть площу круга, описаного навколо цього трикутника.

6. У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 9 і 16. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

7. У трикутнику *ABC* зі сторонами 4 і 6 та кутом між ними 120° знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини тупого кута.

8. У трикутнику *ABC* зі сторонами a і b медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника.

9°. Діагональ ромба завдовжки 10 см дорівнює його стороні. Знайдіть другу діагональ і кути ромба.

10. У паралелограмі *ABCD* проведено бісектрису кута *A*, яка перетинає сторону *BC* в точці *K*. Знайдіть довжину відрізка *BK*, якщо *DC* = 10 см.

11. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 5 см і 12 см. Знайдіть катети трикутника.

12. У трапеції паралельні сторіни дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони — 20 см і 13 см. Знайдіть площу трапеції.