МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНА УСТАНОВА "НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЦЕНТР
ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДІЯЛЬНОСТІ
ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ "АГРООСВІТА"

БОРЩІВСЬКИЙ АГРОТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

РОБОЧИЙ ЗОШИТ
для виконання практичних робіт
студентами спеціальності 5.09010103
«Виробництво та переробка продукції рослинництва»

КОНКУРС "Педагогічні інновації"

НОМІНАЦІЯ: "Інноватика в організації практичного навчання студентів"

2015

ББК 22.11
В55

Укладач: Доскоч Ганна Ярославівна – викладач фундаментальних дисциплін, спеціаліст вищої категорії.

Рецензент: Данильчук Марія Павлівна– викладач фундаментальних дисциплін спеціаліст вищої категорії, викладач-методист.

Робочий зошит призначений для виконання практичних робіт з навчальної дисципліни "Вища математика" та організації самостійної роботи студентів.

Всі завдання систематизовані та розбиті на три групи за рівнем складності. До кожної практичної роботи наведено теоретичні відомості та формули довідкового характеру, вказівки щодо розв'язування задач.

Завдання практичних робіт складені відповідно до діючої програми з вищої математики, затвердженої Департаментом науково-освітнього забезпечення АПВ та розвитку сільських територій Міністерства аграрної політики та продовольства України 02 липня 2014 р.

Рекомендовано цикловою комісією фундаментальних дисциплін
Протокол № ____ від "____" __________ 2015 р.

Зміст

Серед усіх наук, що відкривають людству
шлях до пізнання законів природи, наймогутніша,
найвеличніша наука –математика.

С. Ковалевська

Теорія без практики мертва та безплідна,
практика без теорії неможлива чи згубна.
Для теорії потрібні головним чином знання,
для практики, крім того, і вміння.

Академік О.М.Крилов

Передмова

В сучасному суспільстві працевлаштування та досягнення мети будь-якою людиною найчастіше тісно пов'язано з умінням вдосконалювати: свої здібності, комунікабельність, фізичний стан, навички уважної розумової творчої праці. Важливі також: цілеспрямованість, знання іноземних мов, вільне володіння комп'ютерною технікою, навички логічно і коротко виражати свої думки, організаційні здібності, культурний рівень.

Стратегічним напрямом розвитку освіти України в XXI столітті є забезпечення інтелектуального і етичного розвитку людини на основі залучення її в різноманітну, самостійну, доцільну діяльність у різних галузях знань. Швидке оновлення знань, включаючи базові, ставить перед вищими навчальними закладами завдання підготувати фахівців, здатних:

– адаптуватися до умов сучасного суспільства, які швидко змінюються;

– самостійно набувати необхідні для успішної роботи знання і навики, застосовувати їх на практиці для вирішення різноманітних задач;

– самостійно, критично мислити, уміти бачити виникаючі в реальній дійсності проблеми і шукати раціональні шляхи їх вирішення, використовуючи сучасні технології.

Значну роль в підготовці сучасного конкурентоспроможного фахівця відіграє процес вивчення математичних дисциплін. Основним завданням курсу "Вища математика" є математичне забезпечення спеціальної підготовки майбутніх агрономів, а саме: ознайомлення студентів з основами математичного апарату, необхідного при розв'язанні теоретичних і практичних задач, пов'язаних з майбутньою трудовою діяльністю; набуття студентами уміння самостійно вивчати навчальну літературу з математики; розвиток логічного мислення і підняття загального рівня математичної культури; прищеплення навичок математичного дослідження прикладних завдань. Особлива увага при вивченні вищої математики приділяється практичним заняттям.

Робочий зошит для практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» є зошитом з друкованою основою, призначений для використання студентами агрономічних спеціальностей денної форми навчання при вивченні окремих розділів курсу. У робочому зошиті подано структуру вивчення дисципліни, практичні роботи з розділів курсу "Елементи лінійної та векторної алгебри", "Аналітична геометрія", "Диференціальне числення", "Інтегральне числення", "Диференціальні рівняння". Кожна практична робота містить: тему, мету, короткі теоретичні відомості, добірку завдань для аудиторної та самостійної роботи, перелік питань для самоконтролю.

Для допомоги у підготовці до практичних занять, а також для виконання самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури.

Представлений робочий зошит створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки і посилення прикладної її спрямованості та відповідає чинній програмі з вищої математики для аграрних вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації затвердженої Департаментом науково-освітнього забезпечення АПВ та розвитку сільських територій Міністерства аграрної політики та продовольства України 2 липня 2014 р.

Даний робочий зошит з вищої математики може бути використаний викладачами математичних дисциплін інших навчальних закладів при організації практичних занять, а також самостійному вивченні матеріалу студентами.

Пояснювальна записка

Робочий зошит складається з 6 практичних робіт згідно чинної програми з дисципліни «Вища математика».

Усі завдання систематизовані та розбиті на три групи за рівнем зростання складності. Завдання базового рівня складності визначають мінімально необхідний рівень підготовки студентів. Завдання другого рівня складності позначаються знаком "•" та визначають достатній рівень підготовки студентів. Завдання третього рівня складності позначаються знаком "••" та визначають високий рівень засвоєння навчального матеріалу.

Таким чином, студенти, які виконують тільки завдання базового рівня, отримують за практичну роботу оцінку "задовільно". Якщо студент бажає отримати більш високу оцінку, то він виконує завдання другого та третього рівня складності. Отже, за виконані дві частини практичної роботи студент отримує оцінку "добре", а за всі виконані завдання практичної роботи – "відмінно".

До кожної практичної роботи наведено основні теоретичні відомості та формули довідкового характеру, вказівки щодо розв'язування задач, питання для самоконтролю.

Після виконання практичної роботи студент подає викладачу звіт, оформлений відповідно до вимог робочого зошиту.

Для спрощення контролю виконаних практичних робіт, в кінці робочого зошиту розташована зведена таблиця оцінювання навчальних досягнень студентів, в яку викладач записує дату виконання практичної роботи, отриману оцінку та ставить свій підпис.

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		лекції	практ	лабор.	семін	сам. р.		лекції	практ	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Тригонометричні функції	**6**	4				2						
Комплексні числа.	**4**	2				2						
Елементи лінійної алгебри.	**4**	2	2									
Елементи векторної алгебри.	**4**	2	2									
Аналітична геометрія.	**8**	4	2			2						
Системи лінійних нерівностей та лінійне програмування.	**4**	2				2						
Диференціальне числення.	**10**	4	2			4						
Інтегральне числення.	**10**	4	2			4						
Диференціальні рівняння.	**4**	2	2									
Всього	**54**	26	12			16						

Практична робота № 1

Тема. Обчислення визначників другого і третього порядків. Дії над матрицями. Знаходження оберненої матриці. Розв'язування систем лінійних рівнянь основними методами.

Мета: Навчитися обчислювати визначники другого і третього порядків різними способами, формувати вміння розв'язувати системи лінійних рівнянь методами Крамера, Гаусса та матричним способом.

Література:

1. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. – 3-е изд. – М.: Высш. школа, 2003., стр. 123-130.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2004., ст. 6-31.

3. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003., ст. 38-76.

4. Казановський В.І., Африканова А.Г. Вища математика: конспект лекцій, 2003., ст. 7-28.

При виконанні практичної роботи студент повинен

знати: поняття лінійного рівняння з двома та трьома невідомими та їх систем; випадки розв'язку систем лінійних рівнянь; способи обчислення визначників другого і третього порядку та їх властивості; поняття матриці, їх види, дії над матрицями; способи розв'язання систем лінійних рівнянь;

вміти: обчислювати визначники другого і третього порядків різними способами; виконувати дії з матрицями; знаходити обернену матрицю; розв'язувати системи лінійних рівнянь з двома та трьома невідомими методами Крамера, Гауса та матричним способом.

Основні теоретичні відомості та вказівки

Рівняння виду $ax+by=c$ називається ***лінійним***, де $a,b,c-$задані дійсні числа, а $x,y-$невідомі. Числа a,b називаються ***коефіцієнтами рівняння***, а число с – ***правою частиною*** або ***вільним членом рівняння.***

Число $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ називається ***визначником другого порядку***

<u>Правило:</u> Для того, щоб обчислити визначник другого порядку, треба з добутку елементів, розташованих на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розташованих на побічній діагоналі.

Число $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ називається ***визначником третього порядку***. Цю формулу називають ***розкладом визначника третього порядку за елементами першої строки.***

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де $m -$ кількість строк, $n -$ кількість стовбців.

Числа, які складають цю таблицю, називаються ***елементами матриці***. Кожний елемент має два індекси: a_{ij}, які вказують точне розташування даного елементу ($i -$номер строки, $j -$номер стовпця).

Дії над матрицями:

Сумою двох матриць А та В <u>однакового розміру</u> називається матриця А+В, яка отримується з А та В попарним додаванням їх елементів, розташованих на однакових місцях.

Різницею двох матриць А та В <u>однакового розміру</u> називається матриця А−В, яка отримується з А та В попарним відніманням їх елементів, розташованих на однакових місцях.

Добутком матриці А на число λ називається матриця λA, яка отримується з А множенням на λ кожного її елементу.

Добутком двох матриць $A(m \times n)$ та $B(n \times l)$ називається матриця $C = A \cdot B(m \times l)$, кожний елемент якої отримується за наступною формулою: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

<u>Зауваження:</u> Множення двох матриць можливе тільки тоді, коли кількість стовбців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Оберненою матрицею A^{-1} до матриці А розміру $n\times n$ називається матриця виду:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$\det A-$визначник матриці А, $A_{11}, A_{12},\dots-$ алгебраїчні доповнення до елементів матриці А.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} до елементу матриці a_{ij} називається визначник, який утворюється з матриці А закресленням строки та стовпчика, на перехресті яких стоїть елемент a_{ij}**.** Причому алгебраїчне доповнення береться зі знаком «+», якщо сума індексів $i+j$ число парне, та зі знаком «-» – якщо непарне.

Завдання

1.1. Обчислити визначник:

а) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} \sin 45^o & tg45^o \\ -ctg45^o & \cos 45^o \end{vmatrix}$

1.2. Розв’язати рівняння:

а) $x^2 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix} = 0$

б) $\begin{vmatrix} 3 & 15 - x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$

1.3. Знайти матрицю $2A - B$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 4x + y = 14. \end{cases}$

1.5$^{\bullet}$. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

1.6$^{\bullet}$. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix} = 9$

1.7$^{\bullet}$. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

1.8$^{\bullet}$. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

1.9$^{\bullet}$. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 14, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ x + 2y - z = 7. \end{cases}$$

$1.10^{\bullet\bullet}$. Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 8 = 0$

$1.11^{\bullet\bullet}$. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гауса та матричним способом:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ 2x + y - 4z = 9, \\ 6x - 5y + 2z = 17. \end{cases}$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійним рівнянням?
2. Що є розв'язком системи лінійних рівнянь з двома та трьома невідомими?
3. Чи завжди система лінійних рівнянь має розв'язок?
4. Як обчислити визначник другого порядку?
5. Які способи обчислення визначника третього порядку існують?
6. Як виконати додавання, віднімання та множення матриць?
7. Що називається алгебраїчним доповненням до елементу матриці?
8. Які способи розв'язування систем лінійних рівнянь ви знаєте?

Висновок:____
____
____
____

Оцінка______________ Підпис викладача______________

Практична робота № 2

Тема: Дії над векторами. Застосування скалярного, векторного та мішаного добутків до розв'язування прикладних задач.

Мета: Удосконалити вміння та навички виконання дій над векторами, розв'язувати задачі прикладного характеру із застосуванням скалярного, векторного та мішаного добутків векторів.

Література:

1. Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб. для ВУЗов. – 4-е изд. – М.: Высш. школа, 1998., стр. 223-241.
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища матемактика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. 2-е вид. – Х.: Рубікон, 1999., ст. 8-14.
3. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003., ст. 86-96.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2004., ст. 32-39, 50-65.

При виконанні практичної роботи студент повинен

знати: означення вектора, його координат та абсолютної величини; дії над векторами; поняття колінеарності та компланарності векторів; умову перпендикулярності векторів; формули обчислення скалярного, векторного та мішаного добутків векторів;

вміти: знаходити координати та абсолютну величину вектора; виконувати дії над векторами; визначати колінеарність, перпендикулярність та компланарність векторів; будувати вектори в системі координат; застосовувати дії з векторами до розв'язання прикладних задач.

Основні теоретичні відомості та вказівки

Вектором називається направлений відрізок.

Нехай заданий вектор $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$. Тоді його абсолютна величина обчислюється за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Нехай задані точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$. Тоді абсолютна величина вектора $|\overrightarrow{AB}|$ обчислюється за формулою:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Вектор, абсолютна величина (або модуль) якого дорівнює нулю, називається ***нульовим вектором***.

Кожний ненульовий вектор визначається довжиною та напрямком.

Дії над векторами:

Сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається вектор $\vec{c}$ з координатами: $\vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Різницею векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається вектор $\vec{c}$ з координатами: $\vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.

Добутком вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\vec{a}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається число $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ або $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$.

Два ненульових вектори, напрямки яких співпадають або протилежні, називаються ***колінеарними***.

Теорема (ознака колінеарності): Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб існувало деяке число k, яке задовольняє умові $\vec{a} = k\vec{b}$.

Кутом між двома ненульовими векторами називається кут між напрямками цих векторів. Якщо кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює 90°, то ці вектори називаються ***ортогональними*** (перпендикулярними).

Теорема: Якщо вектори ***перпендикулярні***, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

За визначенням скалярного добутку: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$. Звідси:

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\ .$$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називаються ***компланарними***, якщо кожний з них паралельний одній і тій же площині. Будь-які два вектори завжди компланарні.

Три некомпланарних вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, взятих у вказаному порядку, утворюють ***праву трійку***, якщо після зведення їх до спільного початку вектор $\vec{c}$ розташований по ту сторону від площини, яка містить вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, звідки здається відбувається менший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ проти годинникової стрілки. В противному випадку, трійка векторів називається ***лівою***.

Векторним добутком $[\vec{a};\vec{b}]$ вектора $\vec{a}$ на не колінеарний йому вектор $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який задовольняє наступним трьом умовам:

1) довжина вектора $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a};\vec{b})$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ у вказаному порядку утворюють праву трійку.

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами, то:

$$[\vec{a};\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

Мішаним добутком $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, рівне скалярному добутку вектора $[\vec{a};\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$.

Теорема: Мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектори компланарні.

Мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, який складається з координат векторів, записаних в певному порядку:

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Завдання

2.1. Задані точки $A(-3;2;5)$, $B(5;6;-1)$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його абсолютну величину.

2.2. Задані вектори $\vec{a}(2;-4;6)$ та $\vec{b}(1;-3;-5)$. Знайти:

а) $2\vec{a}-3\vec{b}$

б) $\left|\vec{b}+4\vec{a}\right|$

в) скалярний добуток $\vec{a}$ та $\vec{b}$

г) кут φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$

д) векторний добуток $\vec{a}$ та $\vec{b}$

2.3. При якому значенні k вектори $\vec{a}(3; k+1; 1)$ та $\vec{b}(-4; 2; -3k)$ будуть перпендикулярними?

2.4. Задані точки $A(1;2;3)$, $B(-4;8;3)$, $C(-4;5;1)$, $D(6;2;-3)$. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BD}$?

2.5$^{\bullet}$. Чи компланарні вектори $\vec{a}(4;2;1)$, $\vec{b}(8;6;8)$ та $\vec{c}(5;2;1)$?

$2.6^{\bullet}$. Задані точки $A(1;2;-1)$ та $B(-2;1;1)$. Обчислити відстань від початку координат до середини відрізка AB.

$2.7^{\bullet}$. Побудувати вектор $\overrightarrow{MN}$ та знайти його координати і довжину, якщо $M(3;5;6)$, $N(2;-4;3)$.

$2.8^{\bullet}$. Задані точки $A(1;-3;2)$, $B(1;0;1)$, $C(2;-4;0)$, $D(0;1;-3)$. Знайти координати вектора, який з'єднує середини векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$.

2.9$^{\bullet\bullet}$. Знайти третю координату вектора, якщо задані його координати $x=-4$, $z=3$ та довжина вектора дорівнює 13.

2.10$^{\bullet\bullet}$. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$ та $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$.

2.11$^{\bullet\bullet}$. Обчислити об’єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(1;2;3)$.

2.12[••]. Обчислити роботу, що виконується силою $F=(1;2;3)$ при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з положення $B(1;0;0)$ в положення $C(10;1;2)$.

2.13[••]. Силу $F=(3;2;1)$ прикладено до точки $A(2;0;1)$. Визначити момент M цієї сили відносно початку координат.

Питання для самоконтролю

1. Що називається вектором?
2. Як знайти координати вектора та його абсолютну величину?
3. Як додати, відняти та помножити на число вектори?
4. Як знайти скалярний, векторний та мішаний добутки векторів?
5. Сформулюйте умову колінеарності векторів.
6. Сформулюйте умову перпендикулярності векторів.

7. Сформулюйте умову компланарності векторів.
8. Як знайти кут між векторами?

Висновок:____
____
____
____
____

Оцінка______________ Підпис викладача______________

Практична робота № 3

Тема: Застосування рівнянь прямих на площині та в просторі до дослідження їх взаємного розташування.

Мета: Застосовувати рівняння прямих до дослідження їх взаємного розташування, знаходити кут між ними, використовувати властивості кривих другого порядку до розв’язування прикладних задач.

Література:

1. Казановський В.І., Африканова А.Г. Вища математика: конспект лекцій, 2003., ст. 117-125.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2004., ст. 66-110.
3. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003., ст. 124-135.
4. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-е вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009., ст. 79-154.

При виконанні практичної роботи студент повинен

знати: загальне рівняння прямої на площині; способи задання прямої на площині; дослідження взаємного розташування прямих на площині; формули видів рівнянь прямої на площині; формули знаходження кута між прямими; означення кривих другого порядку на площині та їх рівняння.

вміти: складати рівняння прямої на площині в різних видах; досліджувати взаємне розташування прямих; знаходити кут між прямими заданими в різних видах; записувати рівняння кривих другого порядку та їх характеристики; застосовувати властивості кривих другого порядку при розв'язанні прикладних задач.

Основні теоретичні відомості та вказівки

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд: $Ax + By + C = 0$, де $A, B, C -$ деякі числа (при цьому коефіцієнти А та В не можуть одночасно дорівнювати нулю).

Означення: Будь – який вектор $\vec{a}$ ($|\vec{a}| \neq 0$) паралельний прямій l, називається ***направляючим вектором***.

Означення: Будь – який вектор $\vec{n}$ ($|\vec{n}| \neq 0$) перпендикулярний прямій l, називається ***нормальним вектором***.

Рівняння виду $\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \end{cases}$ називається ***параметричним рівнянням прямої***.

Рівняння виду $\dfrac{x - x_o}{a_1} = \dfrac{y - y_o}{a_2}$ називається ***канонічним рівнянням прямої***.

Рівняння виду $y = kx + b$ називається ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** k та початковою ординатою b. $k = tg\alpha$. Кутовий коефіцієнт можна обчислити, якщо відомі координати двох будь-яких точок прямої: $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Кут між двома прямими:

1. Якщо прямі задані загальним рівнянням:

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

2. Якщо прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$l_1 : y = k_1 x + b_1 \qquad l_2 : y = k_2 x + b_2$$

$$\cos\varphi = \frac{|k_1k_2+1|}{\sqrt{k_1^2+1}\cdot\sqrt{k_2^2+1}}.$$

Умова паралельності двох прямих: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ або $k_1=k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $A_1A_2+B_1B_2=0$ або $k_1k_2+1=0$.

Нехай задані дві точки $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$. Рівняння виду:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

називається ***рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки***.

Рівняння виду $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ називається ***рівнянням прямої у відрізках,*** a та $b-$ точки перетину осей координат.

Нехай задана точка $M_o(x_o;y_o)$ та вектор $\vec{n}=(a;b)$. Рівняння виду:

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)=0$$

називається ***рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору***.

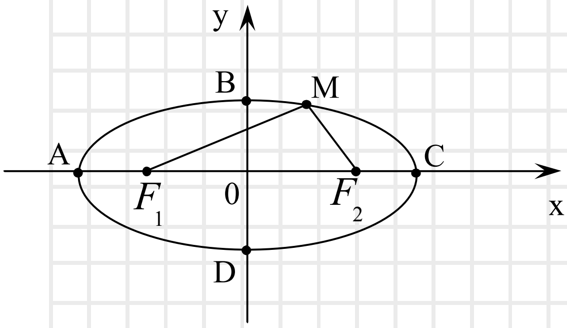
Загальне рівняння лінії другого порядку на площині має вигляд: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C повинен відрізнятися від нуля.

<u>Означення:</u> ***Колом*** називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається ***центром***.

Якщо $C(a;b)$ − центр кола, а $R-$ його радіус, то рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ називається ***загальним рівнянням кола***.

Якщо центр кола співпадає з початком координат, то рівняння приймає вид: $x^2+y^2=R^2$ − ***канонічне рівняння кола***.

<u>Означення:</u> ***Еліпсом*** називається множина точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок (тієї ж самої площини) величина постійна та більша відстані між цими заданими точками. Задані точки називаються ***фокусами еліпса***, а відстань між ними – ***фокальна відстань.***



$F_1, F_2 -$ фокуси еліпса;

$F_1F_2 -$ фокальна відстань, $F_1F_2 = 2c$;

$A, B, C, D -$ вершини еліпса;

$AC -$ велика вісь еліпса, $AC = 2a$;

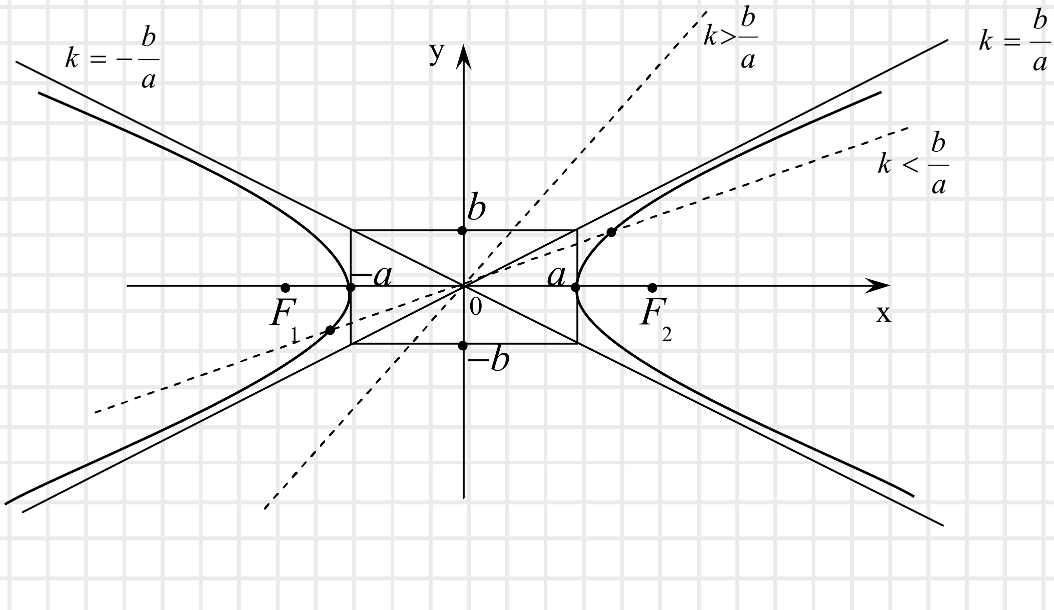
$BD -$ мала вісь еліпса, $BD = 2b$;

Рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$ називається ***канонічним рівнянням еліпса***.

Відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ називається ***ексцентриситетом еліпса***.

<u>Означення:</u> ***Гіперболою*** називається множина точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини є величиною постійною та менше відстані між цими заданими точками.

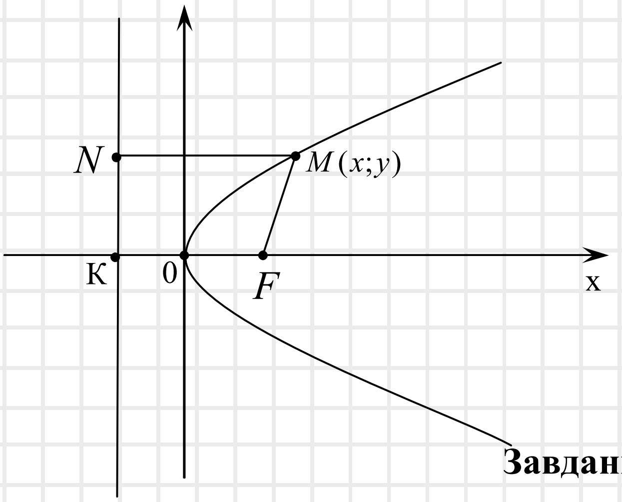
Рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = c^2 - a^2$ називається ***канонічним рівнянням гіперболи***.



<u>Означення:</u> ***Параболою*** називається множина точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої, яка не проходить через задану точку.

Задана точка називається ***фокусом параболи***. Задана пряма називається ***директрисою параболи***. Відстань від фокуса до директриси називається ***фокальним параметром*** параболи та позначається p.

Рівняння $y^2 = 2px$ називається ***канонічним рівнянням параболи***.



$FM = MN$;

$F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$ − фокус параболи;

$KF = p$;

Завдання

3.1. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x + y - 3 = 0$ та $5x - 3y - 2 = 0$ паралельно до вектора $\overline{a}(-3;2)$.

3.2. Знайти точки перетину прямої $3x - 2y - 12 = 0$ з осями координат та побудувати цю пряму.

3.3. Обчислити площу трикутника, який відсікається прямою $3x+4y-12=0$ від координатного кута.

3.4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку К(2;−3) перпендикулярно вектору $\overline{n}(4;-1)$.

3.5. Обчислити кут між прямими:

а) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-6}{3\sqrt{3}}$ та $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-3\sqrt{3}}$

б) $y=-3x+7$ та $y=x+4$

3.6. Знайти відстань від точки $M\left(\frac{3}{2};9\right)$ до прямої $4x+3y-8=0$.

3.7. Знайти координати центра та радіус кола, заданого рівнянням $x^2-2x+4y+y^2-20=0$.

3.8. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика на піввісь дорівнює 5, а фокусна відстань дорівнює 6.

3.9. Знайти асимптоти гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. Побудуйте цю гіперболу та знайдіть її ексцентриситет.

3.10. Знайти точку перетину параболи $y^2=4x$ та прямої $x-2y+4=0$.

3.11$^{\bullet}$. В трикутнику з вершинами в точках $A(-4;-3)$, $B(-3;4)$ та $C(2;1)$ проведена медіана BD. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку В перпендикулярно медіані BD.

3.12$^{\bullet}$. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки $A(3;5)$ та $B(-2;4)$.

3.13$^{\bullet}$. При якому значенні параметра a прямі $\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{a}$ та $\frac{x}{-3}=\frac{y+4}{24}$ перпендикулярні?

3.14$^{\bullet}$. Знайти координати точок перетину прямої $y-7x-12=0$ та кола $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

3.15$^{\bullet}$. Земля рухається по еліптичній орбіті, в одному з фокусів якої знаходиться Сонце. Обчислити ексцентриситет земної орбіти точка (перигелій) знаходиться на відстані 147 млн. км від Сонця, а найбільш віддалена від Сонця точка орбіти (афелій) на відстані 152 млн. км від нього.

3.16$^{\bullet}$. Для гіперболи $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ знайти:

а) напіввісі;

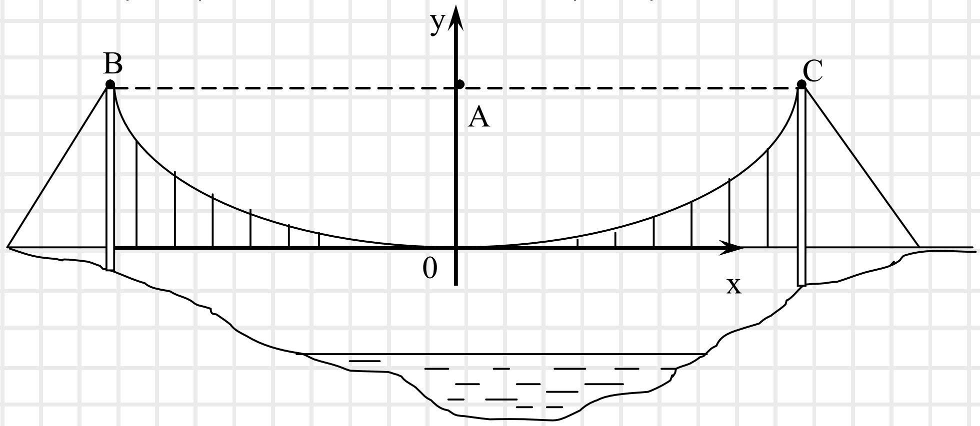
б) координати фокусів;

в) координати вершин;

г) рівняння асимптот.

3.17$^{\bullet\bullet}$. Через точку перетину прямих $x - y + 4 = 0$ та $4x + 2y - 19 = 0$ проведена пряма, паралельна до прямої $2x - 3y + 6 = 0$. Знайти рівняння цієї прямої.

3.18$^{\bullet\bullet}$. Канат підвісного моста має форму параболи (див. мал.). Треба скласти її рівняння відносно вказаних на малюнку осей координат, якщо прогин каната $|OA| = 10$, а довжина моста $|BC| = 60$.



Питання для самоконтролю

1. Як виглядає загальне рівняння прямої на площині?
2. Які способи задання прямої на площині ви знаєте?
3. Запишіть канонічне, параметричне рівняння прямої, рівняння з кутовим коефіцієнтом, рівняння у відрізках.
4. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві точки та перпендикулярно заданому вектору.
5. Сформулюйте ознаки паралельності та перпендикулярності прямих.
6. Запишіть формули обчислення кута між прямими.
7. Які криві другого порядку на площині ви знаєте?
8. Дайте означення кола та запишіть його канонічне рівняння.
9. Дайте означення параболи та запишіть її канонічне рівняння.
10. Що називається ексцентриситетом та чим відрізняється ексцентриситет еліпса та гіперболи?

Висновок:____

____

____

____

Оцінка______________ Підпис викладача______________

Практична робота № 4

Тема: Диференціальне числення функції однієї змінної. Знаходження похідних. Застосування диференціалу до наближених обчислень. Розв'язування задач прикладного змісту.

Мета: Навчитися застосовувати поняття диференціалу до наближених обчислень та до розв'язування задач прикладного змісту.

Література:

1. Казановський В.І., Африканова А.Г. Вища математика: конспект лекцій, 2003., ст. 40-55.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2004., ст. 191-207.

3. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003., ст. 171-181.

4. Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб. для ВУЗов. – 4-е изд. – М.: Высш. школа, 1998., стр. 104-111.

5. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-е вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009., ст. 259-265, 267.

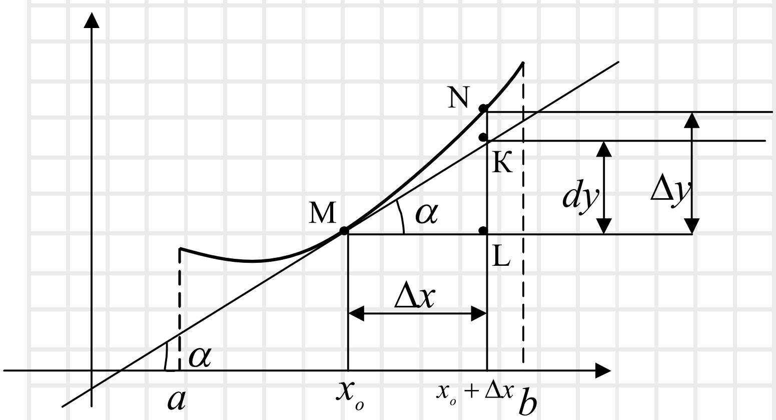
При виконанні практичної роботи студент повинен

знати: поняття похідної функції; формули похідних основних елементарних функцій; правила диференціювання; правило знаходження похідної складеної функції; поняття проміжків монотонності, екстремумів функції, точок перегину; загальну схему дослідження функції. поняття диференціала, його геометричний зміст; формули застосування диференціала до наближених обчислень; рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці; правила знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.

вміти: обчислювати похідні функцій; застосовувати правила диференціювання для обчислення похідних; знаходити похідну складеної функції; знаходити проміжки монотонності, екстремумів, точки перегину, найбільше та найменше значення функції на відрізку; досліджувати за допомогою похідної функцію і будувати графік. Обчислювати наближені значення кореня, степеня, тригонометричних та логарифмічних функцій за допомогою диференціала; знаходити наближене значення приросту функції; складати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці; застосовувати знаходження найбільшого та найменшого значення функції при розв'язанні прикладних задач.

Основні теоретичні відомості та вказівки

Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_o має похідну $f'(x_o)$, то добуток цієї похідної на приріст аргументу Δx називається ***диференціалом функції*** та позначається $df(x_o)$. Таким чином: $df(x_o) = f'(x_o)\Delta x$.



$y = f(x),\ x \in (a;b)$

З $\Delta MKL: |KL| = |ML| tg\alpha$,

$|ML| = \Delta x$

$tg\alpha = f'(x_o)$

$|KL| = f'(x_o)\Delta x$

$|KL| = dy$

Геометричний зміст диференціала: якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_o, то диференціал функції в цій точці дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою x_o, при переході від точки дотику в **точку** з абсцисою $x_o + \Delta x$.

Застосування диференціала до наближених обчислень:

1. Обчислення наближеного значення приросту функції:

$$\Delta f(x) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$$

2. Наближене обчислення степенів: $(x_o + \Delta x)^n \approx x_o^{\,n} + n x_o^{\,n-1}\Delta x$.

3. Наближене значення коренів: $\sqrt[n]{x_o + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_o} + \dfrac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x_o^{\,n-1}}}$.

4. Наближене значення тригонометричних функцій:

$$\sin(x_o + \Delta x) \approx \sin x_o + \cos x_o \Delta x.$$

5. Наближене значення логарифмічних функцій: $\ln(x_o + \Delta x) \approx \ln x_o + \dfrac{\Delta x}{x_o}.$

Рівняння дотичної до кривої L в точці $(x_o; f(x_o))$:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

Рівняння нормалі до кривої L в точці $(x_o; f(x_o))$:

$$y - f(x_o) = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o)$$

Завдання

4.1.Знайти другу похідну функції $y = \dfrac{x^3 - 3x^2}{5 - x}$.

4.2.Знайти екстремуми функції:

а) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

4.3. Знайти точки перегину графіка функції $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$.

4.4. Обчислити наближене значення:

а) $\sqrt[3]{65}$

в) $\sin 29^o$

г) $\ln 1{,}05$

4.5. Знайти наближене значення приросту функції:

а) $y = x^3 - x^2 + x$ при $x = 2$ та $\Delta x = 0{,}01$

4.6. Знайти наближене значення степеня:

а) $3{,}28^3$

б) $1{,}013^4$

4.7. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ в точці $x_o = 3$.

4.8•. Обчислити значення похідної функції $y = \frac{3x^2 - 7}{\sqrt{2x - 3}}$ в заданій точці $x_o = 2$.

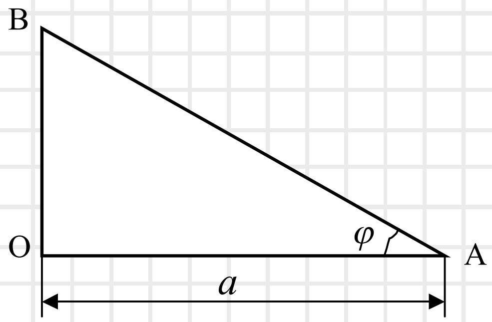
4.9.•. Об’єм куба, ребро якого дорівнює 40 см, при нагрівання збільшився на 0,05 свого початкового значення. Знайти видовження ребра куба.

.

4.10$^{\bullet\bullet}$. Дослідити функцію та побудувати її графік:

а) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$

4.11$^{\bullet\bullet}$. Нехай електрична лампочка переміщується вздовж вертикальної прямої OB (див. мал.). На якій відстані від горизонтальної площини слід її розмістити, щоб в точці A цієї площини освітленість була найбільшою. $OA = a$.



Питання для самоконтролю

1. Дайте означення похідної другого порядку.
2. Сформулюйте ознаку зростання (спадання) функції на проміжку.
3. Що називається максимумом та мінімумом функції?
4. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точки перегину графіка функції.
5. Що називається диференціалом функції?
6. За яким правилом знаходять диференціал функції?
7. Дайте геометричне тлумачення диференціалу функції.
8. Як застосовується диференціал функції в наближених обчисленнях?
9. Яка пряма називається дотичною до кривої?
10. Яка пряма називається нормаллю до кривої?
11. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до кривої.
12. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?

Висновок:____

____

Оцінка______________ Підпис викладача______________

Практична робота № 5

Тема: Інтегральне числення. Обчислення невизначених і визначених інтегралів. Застосування інтегралів до обчислення площ та об’ємів фігур.

Мета: Узагальнити вміння і навички обчислення площ та об’ємів фігур за допомогою визначеного інтегралу, подвійного інтегралу; застосовувати визначений інтеграл до розв’язування прикладних задач.

Література:

1. Казановський В.І., Африканова А.Г. Вища математика: конспект лекцій, 2003., ст. 68-92.
2. Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб. для ВУЗов. – 4-е изд. – М.: Высш. школа, 1998., стр. 307-314, 317-324.
3. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-е вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009., ст. 368-383, 425-435.
4. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003., ст. 235-241, 261-267, 268-286.

При виконанні практичної роботи студент повинен

знати: поняття первісної, визначеного інтегралу та їх властивості; таблицю інтегралів елементарних функцій; методи інтегрування; геометричний та фізичний зміст визначеного інтегралу; поняття подвійного інтегралу та його властивості.

вміти: знаходити невизначений та визначений інтеграли різними способами; застосовувати визначений інтеграл для обчислення площ фігур; обчислювати подвійний інтеграл та застосовувати його при розв’язанні задач; розв’язувати прикладні задачі за допомогою визначеного інтегралу.

Основні теоретичні відомості та вказівки

Означення: Первісною для даної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $(a;b)$ називається така функція $F(x)$, похідна якої для всіх $x \in (a;b)$ дорівнює $f(x)$. Тобто: $F'(x) = f(x)$.

Означення: Якщо $F(x)-$первісна функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначається символом: $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Властивості невизначеного інтегралу:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3) $\int df(x) = f(x) + C$
4) $\int f'(x)dx = f(x) + C$
5) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$
6) $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Таблиця невизначених інтегралів елементарних функцій:

1) $\int 0dx = C$, $C - const$.
2) $\int dx = x + C$.
3) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.
4) $\int \dfrac{dx}{x} = \int \dfrac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \ln|x| + C$.
5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.
6) $\int e^x dx = e^x + C$.

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

11) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$.

12) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$.

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C, \quad a \neq 0$.

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad a \neq 0$.

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$.

Властивості визначеного інтегралу:

1) $\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int\limits_a^b f(x) dx \pm \int\limits_a^b g(x) dx$.

2) $\int\limits_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x) dx$.

3) $\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_a^c f(x) dx + \int\limits_c^b f(x) dx$.

4) $\int\limits_a^b k dx = k(b-a)$.

5) Якщо на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегруються, та $f(x) \le g(x)$, то справедлива нерівність $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

Теорема: Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на цьому відрізку, то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) - \text{формула Ньютона – Лейбніца.}$$

Геометричний зміст визначеного інтегралу для неперервної невід'ємної функції $f(x)$ полягає в тому, що інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції, яка визначається функцією $f(x)$, $x \in [a;b]$.

Означення: Подвійна сума $\sum\limits_i^n \sum\limits_j^n f(x_i; y_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$ називається ***інтегральною сумою*** функції $f(x;y)$.

Означення: Якщо границя інтегральної суми при $n \to \infty$ існує та не залежить від вибору точок $(x_i; y_j)$, то вона називається ***подвійним інтегралом*** від функції $f(x;y)$ по області G та позначається $\iint\limits_G f(x;y)\,dx\,dy$.

Властивості:

1. $\iint\limits_G \big(f(x;y) + g(x;y)\big)dx\,dy = \iint\limits_G f(x;y)\,dx\,dy + \iint\limits_G g(x;y)\,dx\,dy$.
2. $\iint\limits_G k \cdot f(x;y)\,dx\,dy = k \cdot \iint\limits_G f(x;y)\,dx\,dy$.

Зведення подвійного інтегралу до повторного:

1. Якщо функція $f(x;y)$ задана в області $G: a \le x \le b,\ c \le y \le d$

$$\iint\limits_G f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x;y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx$$

2. Якщо функція $f(x;y)$ задана в області G, яка утворюється перетином кривих $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ (причому $\psi(x)$ обмежує область зверху, а $\varphi(x)$ − знизу)

$$\iint_G f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy$$

Завдання

5.1. Обчислити невизначений інтеграл:

а) $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8 \right) dx$

б) $\int \left(e^{3x} + 1 \right) dx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-9x}}$

г) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x}{3x^2} dx$

5.2. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^8 \left(8\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{2x}\right)dx$

б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx$

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2\cos x\right)dx$

5.3. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

а) $y = -x^2 + 10$, $y = 1$

б) $y = x^2$, $y = 2x + 3$

5.4. Швидкість точки задана рівнянням $\upsilon(t) = 18t - 6t^2$ (м/с). Обчислити, який шлях (в метрах) пройшла точка від початку руху до повної зупинки.

5.5. Обчислити роботу, яку необхідно виконати при розтягу пружини на 6 см, якщо для її розтягу на 3 см необхідно прикласти силу у 15 Н.

5.6. Обчислити подвійний інтеграл функції $f(x;y) = 2x + y^2 - xy$ по області $G: 0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$.

5.7$^{\bullet}$. Обчислити невизначений інтеграл:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}-x}{x^2}dx$

б) $\int \left(2x^3-1\right)^4 \cdot x^2 dx$

5.8$^{\bullet}$. Обчислити визначений інтеграл:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)} \right) dx$

б) $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx$

5.9•. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

а) $y = x^2 - 4x + 5$, $x - y + 5 = 0$

б) $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

5.10$^{\bullet}$. Обчислити роботу при стисненні пружини на 3 дм, якщо для її стиснення на 2 см була виконана робота 30 Дж.

5.11•. Обчислити подвійний інтеграл функції $f(x;y) = xy + 2$ по області G, яка обмежена лініями $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

5.12•. Знайти об'єм тіла обмеженого площинами $x = 1$, $y = x^2$, $z = 0$ та поверхнею $z = x^2 + y^2$.

5.13$^{\bullet\bullet}$. Обчислити площу фігури обмежену лініями:

а) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 9x - \frac{15}{2}$, $y = -x^2 + 6x - 5$.

б) $y = 2\sin x$, $y = tgx$.

5.14••. Обчислити силу тиску води на вертикальну пластину, яка має форму трикутника з основою 2 м та висотою 3 м, вершина трикутника знаходиться на поверхні води, а основа паралельна їй.

Питання для самоконтролю

1. Що називається первісною функції?
2. Які методи інтегрування ви знаєте?
3. В чому полягає геометричний зміст визначеного інтегралу?
4. Як визначений інтеграл застосовується в механіці?
5. Як обчислити подвійний інтеграл?

Висновок:____
____
____
____
____

Оцінка______________ Підпис викладача______________

Практична робота № 6

Тема: Диференціальні рівняння. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь.

Мета: Поглибити вміння та навички розв’язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку та диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

Література:

1. Казановський В.І., Африканова А.Г. Вища математика: конспект лекцій, 2003., ст. 92-103.

2. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003., ст. 294-315

3. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-е вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009., ст. 468-480.

При виконанні практичної роботи студент повинен

знати: означення диференціального рівняння, його загального та частинного розв'язків; види диференціальних рівнянь та способи їх розв'язання; поняття інтегральної кривої; алгоритм розв'язання задачі Коші.
вміти: визначати вид диференціального рівняння та його порядок; знаходити загальний та частинний розв'язки диференціальних рівнянь різних видів; розв'язувати задачу Коші; складати рівняння інтегральної кривої, яка задовольняє заданим умовам; застосовувати диференціальні рівняння при розв'язанні прикладних задач.

Основні теоретичні відомості та вказівки

Означення: Рівняння, яке містить невідому функцію та її похідні, називається ***диференціальним***.

Означення: ***Порядком диференціального рівняння*** називається порядок старшої похідної, яка входить до його складу.

Всяка функція $\varphi(x)$, яка зв'язує змінні та обертає рівняння у тотожність, називається ***розв'язком диференціального рівняння***.

Будь-яка крива, задана рівнянням $y=\varphi(x)$, де $\varphi(x)-$деякий розв'язок рівняння $y'=f(x;y)$, називається ***інтегральною кривою***.

Задача знаходження розв'язку рівняння $y'=f(x;y)$, який задовольняє умові $y(x_o)=y_o$, де x_o, y_o-задані числа, називається ***задачею Коші***. Умова $y(x_o)=y_o$ називається ***початковою умовою***.

Геометрично розв'язати задачу Коші означає знайти таку інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M_o(x_o;y_o)$.

Множина всіх розв'язків диференціального рівняння задається формулою $y=\varphi(x;C)$, де $C-const$. Ця функція називається ***загальним розв'язком диференціального рівняння***.

Кожний розв'язок диференціального рівняння, який отримується із загального розв'язку при конкретному значенні постійної С, називається ***частинним розв'язком диференціального рівняння***.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

<u>Означення:</u> Диференціальні рівняння виду $y' = f(x)\cdot g(y)$, де $f(x)$ та $g(y)-$ задані функції, називаються ***диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними***.

Для розв'язку таких диференціальних рівнянь використовують запис похідної у диференціалах: $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

<u>Правило знаходження загального розв'язку:</u>

1. розділити змінні;
2. про інтегрувати обидві частини рівняння по y та x відповідно;
3. виразити y через x.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння.

<u>Означення:</u> Диференціальні рівняння виду $y' = f(x)y + g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)-$ задані функції, називаються ***лінійними диференціальними рівняннями***.

Якщо $g(x)=0$, то лінійне диференціальне рівняння називається ***однорідним***. Воно має вид $y' = f(x)y$ **(3)**

Рівняння (3) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Тобто загальний розв'язок диференціального рівняння (3) задається формулою: $y = C\cdot e^{\int f(x)dx}$.

Якщо $g(x)\neq 0$ та $f(x)\neq 0$, то рівняння $y' = f(x)y + g(x)$ називається ***неоднорідним***. Загальний розв'язок такого диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння та частинного розв'язку даного рівняння: $y = C\cdot e^{\int f(x)dx} + \varphi(x)$.

Для лінійного рівняння виду $y' = ky + b$, де k та $b-$деякі числа ($k\neq 0$), розв'язок знаходиться за формулою $y = C\cdot e^{kx} - \dfrac{b}{k}$.

Завдання

6.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = 5x^4 = 3x^2 + 2x - 7$

б) $y' = 7x - e^{3x} + 4\cos 2x$

в) $y' = \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 4^x$

г) $y' + 2y + 3 = 0$

6.2. Знайти інтегральну криву функції $y' = 3x^2 - 6x - 4$, яка проходить через точку $M(-1;2)$.

6.3. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

а) $y' = \dfrac{2x-3}{y^2}$

б) $(x+3)dy - (y+2)dx = 0$

6.4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = (6 = 2x)^3$, яке задовольняє початковим умовам $y(-2) = 5$.

б) $y' = \dfrac{\cos 2x}{3}$, яке задовольняє початковим умовам $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.

$6.5^{\bullet}$. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = 2\sqrt{y}$

б) $y' = xy^2$

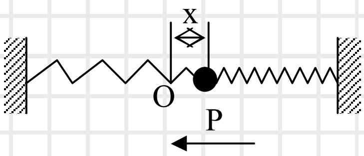
в) $y' = y \sin x$

г) $y' = \dfrac{3}{\sqrt{2x+4}} + \dfrac{4}{\cos^2 2x}$

$6.6^{\bullet}$. Знайти інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M(x_o; y_o)$, якщо $y'' = 3 - 2x$, $y' = 1$, $y = -2$ при $x = -1$.

$6.7^{\bullet}$. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y\cos x$, яке задовольняє початкову умову $y = 1$ при $x = 0$.

6.8$^{\bullet\bullet}$. Складіть диференціальне рівняння, що відповідає руху точки P з масою m, на яку діє сила пружності F з боку пружини, як показано на малюнку.



6.9$^{\bullet\bullet}$. Розв'яжіть рівняння $x'' = -g$, яке описує вільне падіння матеріальної точки та знайдіть розв'язок цього рівняння, який задовольняє умовам $x(0) = 10$, $\upsilon(0) = 5$.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення диференціального рівняння.
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Що називається розв’язком диференціального рівняння?
4. Що таке загальний розв'язок диференціального рівняння?
5. Що таке частинний розв'язок диференціального рівняння?
6. Дайте визначення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
7. Сформулюйте правило знаходження загального розв'язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Висновок:____

Оцінка_______________ Підпис викладача_______________

Висновки

Запропонований робочий зошит для проведення практичних занять з дисципліни "Вища математика" створений на основі багаторічного досвіду ведення практичних занять з вищої математики та відповідає всім необхідним вимогам щодо сучасної математичної освіти.

Робочий зошит був апробований та впроваджений в навчальний процес викладачами Борщівського агротехнічного коледжу в 2013-2015 Аналіз результативності виконання практичних робіт студентами показав, що запропонована структура найбільш повно та об’єктивно дозволяє визначити рівень знань кожного студента з вищої математики.

Розбиття завдань практичних робіт на три рівня складності є вдалим. Студенти з невисоким рівнем якості засвоєння навчального матеріалу в змозі виконати завдання базового рівня, що сприяє підвищенню їх самооцінки. Разом з цим, студенти, які мають більш високий рівень знань, прагнуть до підвищення освітнього рівня, виконуючи завдання достатнього та високого рівнів, що сприяє зацікавленості у вивченні навчальної дисципліни та активізації самостійної роботи студентів.

Робочий зошит з вищої математики може бути використаний викладачами вищих навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації для проведення практичних робіт та організації самостійної роботи студентів.

Зведена таблиця успішності.

№ пр. з.	Тема заняття	Дата захисту	Оцінка	Підпис викладача
1	Обчислення визначників другого і третього порядків. Дії над матрицями. Знаходження оберненої матриці. Розв’язування систем лінійних рівнянь основними методами.			
2	Дії над векторами. Застосування скалярного, векторного та мішаного добутків до розв’язування прикладних задач.			
3	Застосування рівнянь прямих на площині та в просторі до дослідження їх взаємного розташування.			
4	Диференціальне числення функції однієї змінної. Знаходження похідних. Застосування диференціалу до наближених обчислень. Розв’язування задач прикладного змісту.			
5	Інтегральне числення. Обчислення невизначених і визначених інтегралів. Застосування інтегралів до обчислення площ та об’ємів фігур.			
6	Диференціальні рівняння. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь та рівнянь з відокремленими змінними.			

Література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2004.
2. Казановський В.І., Африканова А.Г. Вища математика: конспект лекцій, 2003.
3. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-е вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009.
4. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.
5. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. 2-е вид. – Х.: Рубікон, 1999.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб. для ВУЗов. – 4-е изд. – М.: Высш. школа, 1998.
7. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. – 3-е изд. – М.: Высш. школа, 2003.
8. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: навчальний посібник для професійно-технічних навчальних закладів. – К.: Техніка, 2000.