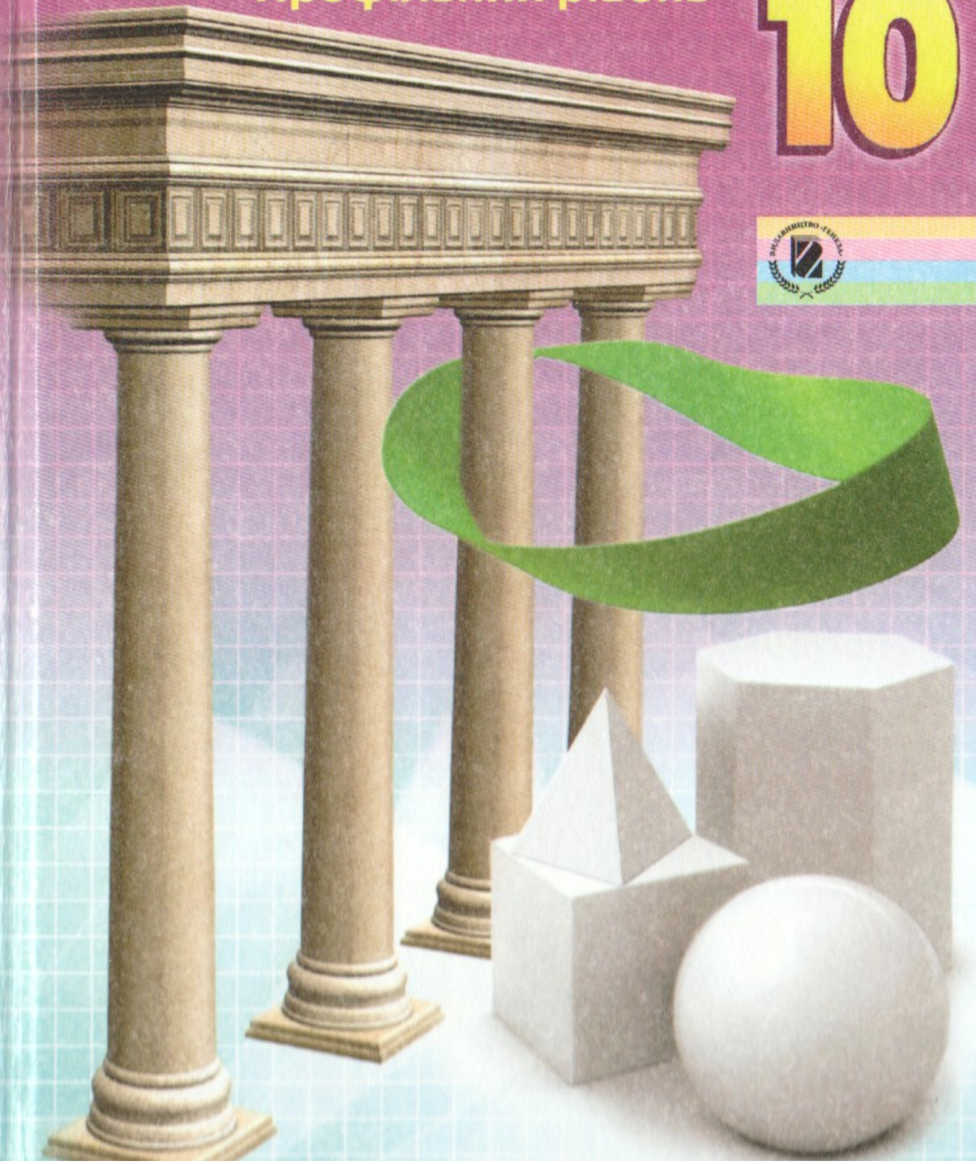
Г.П. Бевз, В.Г. Бевз,
Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров

Геометрія

Профільний рівень

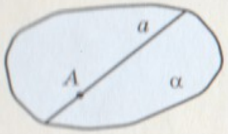
10



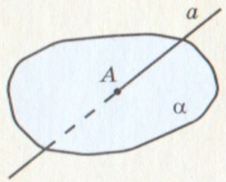
ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

Геометричні поняття – { геометричні фігури; геометричні відношення; геометричні перетворення; геометричні величини

$A \in a, a \subset \alpha, A \in \alpha$

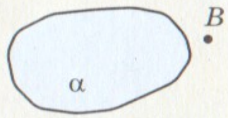


$a \cap \alpha = A, A \in \alpha, a \not\subset \alpha$

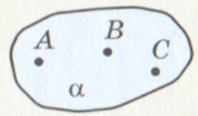


Аксіоми стереометрії

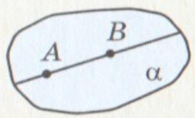
C_1. Існують α і B такі, що $B \notin \alpha$



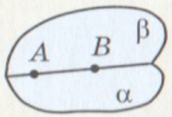
C_2. Через довільні A, B, C проходить α



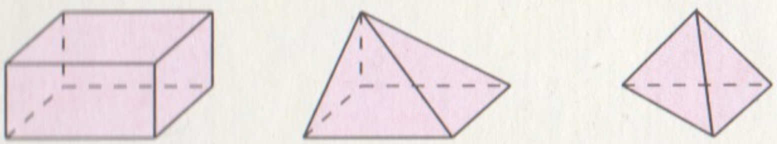
C_3. Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$



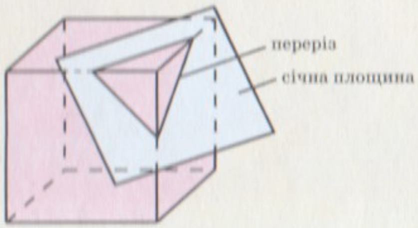
C_4. Якщо $A \in \alpha$ і $A \in \beta$, то $\alpha \cap \beta = AB$

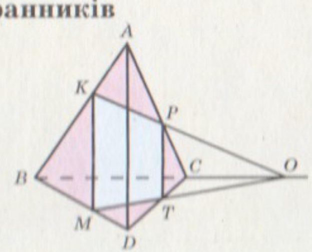


Многогранники

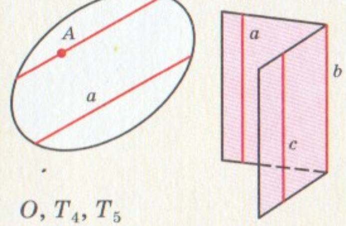
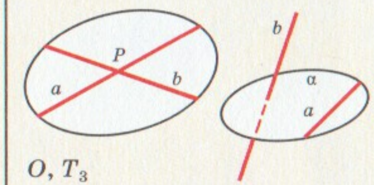
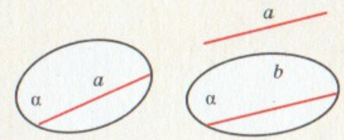
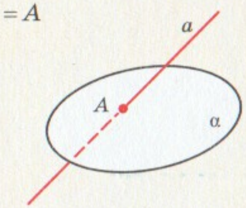
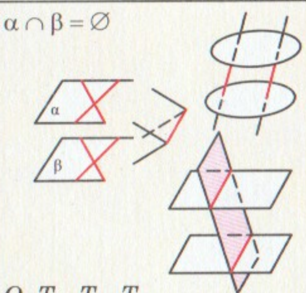
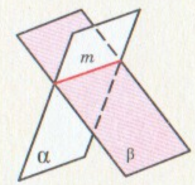
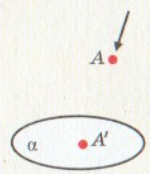
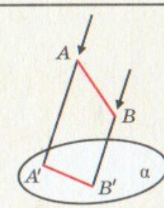
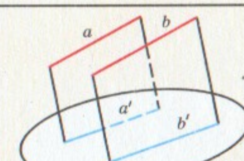
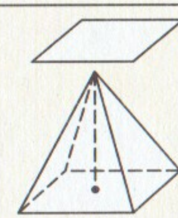
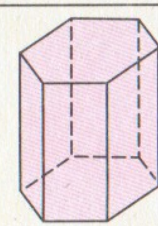
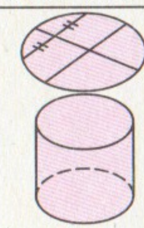


Перерізи многогранників





Паралельність прямих і площин

Відношення	Паралельні	Не паралельні
Пряма і пряма	$a \parallel b, b \parallel c$  O, T_4, T_5	Пересічні, Мимобіжні  O, T_3
Пряма і площина	$a \subset \alpha$, $a \cap \alpha = \varnothing$  O, T_6, T_7	$a \cap \alpha = A$  O
Площина і площина	$\alpha \cap \beta = \varnothing$  O, T_8, T_9, T_{10}	$\alpha \cap \beta = m$  O
Паралельне проектування	  O, T_{11}	 $a \parallel b \to a' \parallel b'$ $a : b = a' : b'$
Зображення фігур		 

Тут O — означення, T — теорема.

Г.П. Бевз
В.Г. Бевз
Н.Г. Владімірова
В.М. Владіміров

Геометрія

10

Підручник
для загальноосвітніх
навчальних закладів

Профільний рівень

*Рекомендовано
Міністерством освіти
і науки України*

КИЇВ
«ГЕНЕЗА»
2010

ББК 22.151я721
Г36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України № 177 від 03.03.2010 р.)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України.

Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України.

Експерти, які здійснювали експертизу:

Єргіна О.В. – методист Київського університету ім. Б.Д. Грінченка, ІППО;

Ткаченко В.М. – методист Інформаційно-методичного центру управління освіти і науки Сумської міської ради;

Загородна М.В. – учитель-методист Вишнівецької ЗОШ І–ІІІ ступенів, Збаразький р-н, Тернопільська обл.;

Крикун Н.М. – учитель-методист Смілянської ЗОШ І–ІІІ ступенів № 7, Черкаська обл.

Геометрія : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. :
Г36 профіл. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К. : Генеза, 2010. – 232 с. : іл. – Бібліогр. : с. 221.
ISBN 978-966-504-997-5.

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-504-997-5

ШАНОВНІ СТАРШОКЛАСНИКИ!

Геометрія – одна з найдавніших, найшляхетніших, корисних і цікавих наук. У ній – згусток значної частини загальнолюдської культури, надбаної людством за кілька тисячоліть. А ще вона є незамінним інструментарієм для науковців і виробничників, засобом для розвитку логічного мислення, просторової уяви, раціоналізаторських здібностей та інших корисних якостей волі і характеру молоді.

Ось що писав про геометрію відомий архітектор XX ст. Ле Корбюзьє: «Тільки дотримуючись законів геометрії, архітектори давнини могли створити свої шедеври. Невипадково кажуть, що піраміда Хеопса – німий трактат з геометрії, а грецька архітектура – зовнішнє відображення геометрії Евкліда. Минули століття, але роль геометрії не змінилась. Як і раніше, вона залишається граматикою архітектора». І не тільки архітектора чи інженера-конструктора. Ця наука є своєрідною граматикою кожного фахівця, який використовує геометричні форми.

Геометрія складається з двох частин: *планіметрії* і *стереометрії*. У попередніх класах ви вивчали в основному планіметрію, тепер переходите до вивчення стереометрії (від грец. στερεοζ – просторовий), в якій розглядаються властивості геометричних фігур у просторі.

Стереометрія – геометрія тривимірного простору. За змістом вона багатша від планіметрії і цікавіша, оскільки вивчає властивості як плоских геометричних фігур, так і неплоских.

Перший розділ, за програмою, – матеріал для повторення, систематизації та узагальнення найважливіших відомостей з планіметрії.

Новий навчальний матеріал викладено в трьох розділах і додатках. Кожен з розділів містить теоретичний матеріал і задачі. Читаючи теорію, основну увагу слід звертати на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. *Курсивом* виділено геометричні терміни, назви понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити відповідні приклади. **Жирним шрифтом** надруковано важливі геометричні твердження, зокрема теореми.

У кожному параграфі підручника є рубрика «Для допитливих». Вона містить додаткові відомості для тих, хто хоче знати більше. У рубриці «Виконаємо разом» наводяться задачі з розв'язаннями. Радимо переглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Знати геометрію – це насамперед уміти користуватися нею. Вчитися користуватися геометричними знаннями найкраще під час розв'язування геометричних задач. Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором. Задачі і вправи в підручнику поділено на: «Виконайте усно», рівень А, рівень Б і «Вправи для повторення». У кожному розділі є задачі за готовими малюнками. Умови таких задач подано малюнками і короткими записами.

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу подано «Головне в розділі». Перевірити, наскільки ви засвоїли новий матеріал, та підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання ви зможете, розв'язуючи задачі та виконуючи завдання з рубрик «Тестові завдання» і «Типові задачі для контрольної роботи».

Програмну тему «Ортоцентричний тетраедр» дещо розширено і вміщено в додатках «Елементи геометрії тетраедра». Там міститься ще кілька тем, в яких поглиблено розглядаються деякі найважливіші властивості найпростішого многогранника – тетраедра. Ці теми адресуємо для самостійного опрацювання тим учням, які мають бажання займатися посильною для початківців науково-дослідною роботою. А задачі, що є в «Додатках», можна пропонувати всім учням.

Іноді вважають, що найважливіше в геометрії – доведення теорем. Звичайно, учитися доводити теореми – справа корисна. Але не меншу роль у цій науці відіграють поняття, їх означення і класифікації; геометричні фігури, їх побудова і перетворення; геометричні величини, їх вимірювання та обчислення. Один з відомих геометрів XX ст. Д. Гільберт писав: ***«У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком»***.

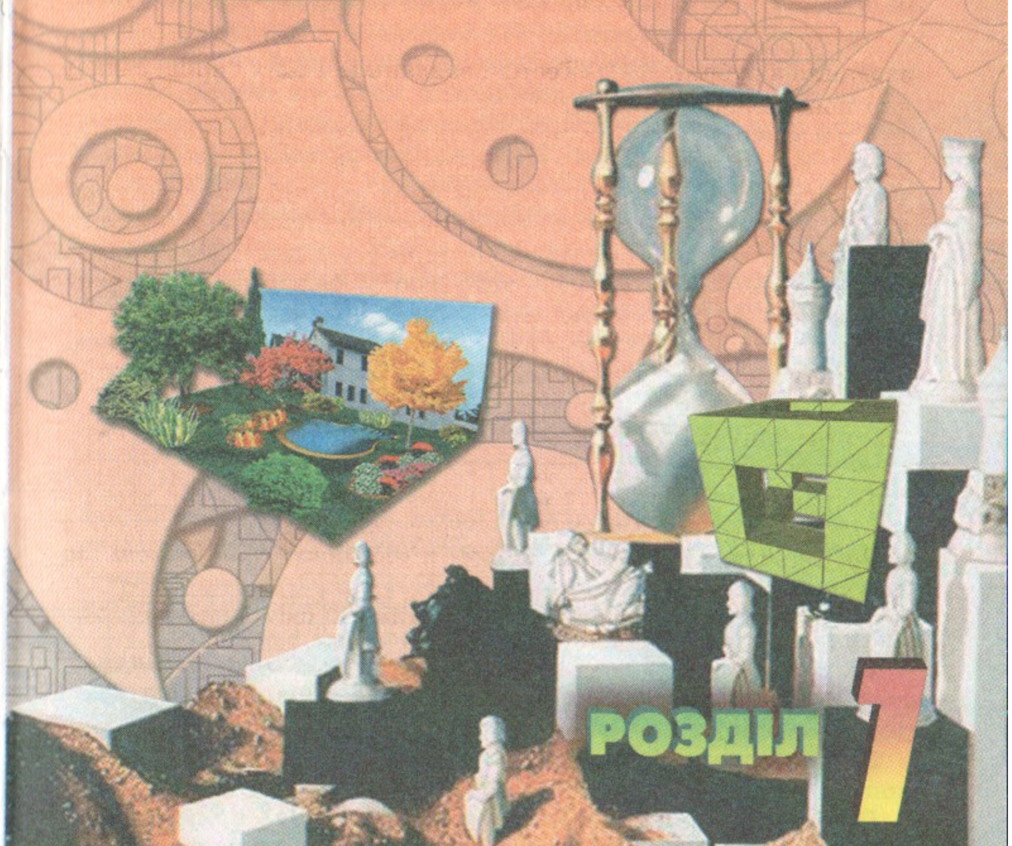
Запрошуємо вас у цей багатий і дивний світ Геометрії.

Автори

Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

Основні теми розділу:

- Опорні факти планіметрії.
- Методи розв'язування планіметричних задач.



РОЗДІЛ 1

Навчання не можна довести до ґрунтовності без можливо частих і особливо майстерно поставлених повторень.

Я.А. Коменський

§1 ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Пригадаємо найважливіші відомості з планіметрії, які часто використовуються в стереометрії.

Аксіоми планіметрії. Основне в геометрії – її поняття і твердження. Для більшості понять формулюються означення, але існують поняття неозначувані. Це – *точка*, *пряма*, *площина* та деякі інші.

Переважну більшість геометричних тверджень доводять, тобто показують, що вони як логічні наслідки випливають з інших істинних тверджень. А як бути, коли на початку курсу ще немає «інших тверджень»? У цих випадках кілька тверджень приймають за істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*. А доводжувані твердження – *теоремами*.

Для планіметрії, як і для інших наук чи теорій, можна обирати різні системи аксіом. Одна з них може бути такою.

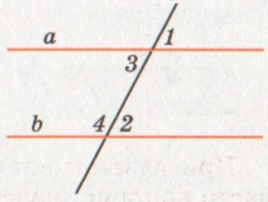
1. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.*
2. *Через будь-які дві різні точки можна провести пряму і тільки одну.*
3. *Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.*
4. *Кожний відрізок має певну довжину.*
5. *Кожний кут має певну міру.*
6. *Пряма розбиває площину на дві півплощини.*
7. *На будь-якій прямій від заданої точки у заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.*
8. *Від будь-якого променя у даній півплощині можна відкласти даний кут з вершиною у початку променя і тільки один.*
9. *Який би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно заданої прямої.*
10. *Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій (аксіома Евкліда).*

Розділи про геометричні величини, геометричні перетворення і побудови потребують додаткових аксіом.

Паралельні і перпендикулярні прямі. Дві прямі однієї площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються. Два відрізки або промені називають паралельними, якщо вони належать паралельним прямим.

Ознаки паралельності прямих. Дві прямі a і b однієї площини паралельні (мал. 1), якщо їх січна утворює з ними:

1) рівні відповідні кути ($\angle 1 = \angle 2$); або
2) рівні внутрішні різносторонні кути ($\angle 2 = \angle 3$); або
3) внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює $180°$ ($\angle 3 + \angle 4 = 180°$).

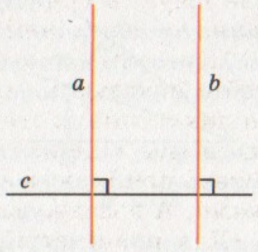


Мал. 1

Властивості паралельних прямих. Якщо прямі a і b паралельні, то виконуються всі три рівності, зазначені вище (п. 1–3).

Відношення паралельності прямих транзитивне: якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Дві прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Відрізки або промені називають перпендикулярними, якщо вони належать перпендикулярним прямим.



Мал. 2

Дві прямі однієї площини, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні (мал. 2). Якщо $a \perp c$ і $b \perp c$, то $a \parallel b$.

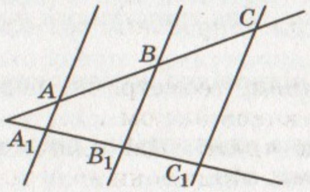
Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута і на одній його стороні відтинають рівні відрізки, то і на другій його стороні вони відтинають рівні відрізки (мал. 3).

Якщо $AB = BC$, то $A_1B_1 = B_1C_1$.

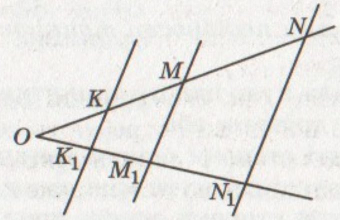
Узагальнена теорема Фалеса. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки (мал. 4).

$$\frac{KM}{MN} = \frac{K_1M_1}{M_1N_1}.$$

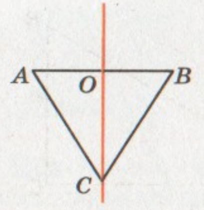
Геометричне місце точок – це множина всіх точок, які задовольняють певну умову.



Мал. 3



Мал. 4

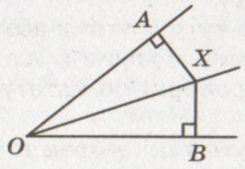


Мал. 5

Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до цього відрізка (мал. 5).

Якщо $AO = BO$ і $CO \perp AB$, то $AC = BC$.

Геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін, – бісектриса цього кута (мал. 6).



Мал. 6

Трикутники. *Трикутник* – замкнена ламана із трьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається трикутником. Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути. Суму сторін трикутника називають його периметром.

Якщо сторони трикутника a, b, c, а протилежні їм кути α, β, γ, то:

$$|b - c| < a < b + c; \ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Ознаки рівності трикутників. Два трикутники рівні, якщо:

1) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника; або

2) сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника; або

3) три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника.

Відрізок, який сполучає середини двох сторін трикутника, – його *середня лінія.* Середня лінія трикутника паралельна його третій стороні і дорівнює її половині.

Трикутники, в яких усі відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні, називаються *подібними*.

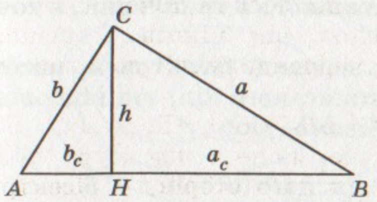
Основна теорема про подібність трикутників. Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

Ознаки подібності трикутників. Два трикутники подібні, якщо:

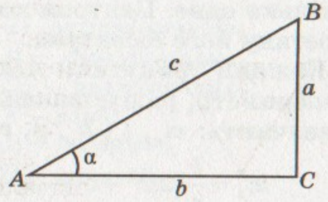
1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого; або

2) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого, а кути між ними рівні; або

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого.



Мал. 7



Мал. 8

Два прямокутні трикутники подібні, якщо:

1) гострий кут одного трикутника дорівнює куту другого; або

2) катети одного трикутника пропорційні катетам другого; або

3) катет і гіпотенуза одного трикутника пропорційні катету і гіпотенузі другого.

З ознак подібності трикутників випливають такі теореми.

• Бісектриса трикутника ділить його протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

• Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

• Катет прямокутного трикутника – середнє пропорційне гіпотенузи c і його проекції на гіпотенузу. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, – середнє пропорційне відрізків, на які висота ділить гіпотенузу (мал. 7).

$$a^2 = a_c \cdot c; \quad b^2 = b_c \cdot c; \quad h^2 = a_c \cdot b_c.$$

Якщо c – гіпотенуза, а a, b – катети прямокутного трикутника (мал. 8), то:

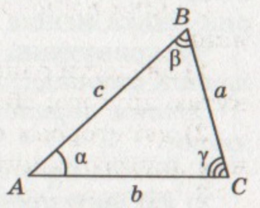
$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ – \textit{теорема Піфагора};}$$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha; \quad \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha.$$

Якщо a, b, c – сторони, а α, β, γ – протилежні їм кути трикутника (мал. 9), то завжди

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ – \textit{теорема косинусів},}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \text{ – \textit{теорема синусів}.}$$



Мал. 9

Кожен з трьох останніх дробів дорівнює $2R$, де R – радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

Навколо кожного трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін. У кожний трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину його бісектрис.

Кожний трикутник ABC має медіани, бісектриси, висоти, півпериметр, радіус вписаного і описаного кіл, які відповідно позначають: m_a, l_a, h_a, p, r, R. Відомо, що:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2(b^2+c^2)-a^2); \quad l_a^2 = \frac{1}{(b+c)^2}bc((b+c)^2-a^2);$$

$$h_a^2 = \frac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c); \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Площа трикутника. Кожний трикутник (як частина площини, обмежена замкненою ламаною) має площу. Формули для визначення площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a; \qquad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

$$S = r \cdot p; \qquad S = \frac{abc}{4R};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ – *формула Герона.*

Для прямокутних і рівносторонніх трикутників формули простіші:

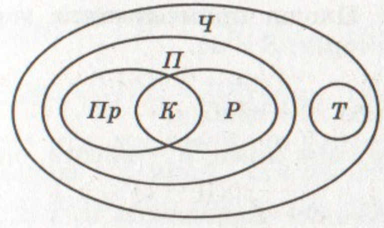
Прямокутний трикутник	Рівносторонній трикутник
$S = \frac{1}{2}ab;$ $r = \frac{a+b-c}{2};$ $R = \frac{c}{2};$ $h = \frac{a \cdot b}{c}$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Чотирикутники. Чотирикутник – проста замкнена ламана із чотирьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається чотирикутником. Сума всіх кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°. Кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших його сторін.

Чотирикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні, – *паралелограм.*

Ознаки паралелограма. Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

1) кожна його сторона дорівнює протилежній стороні;
2) дві його протилежні сторони паралельні й рівні;
3) його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.



Ч — *чотирикутники*
П — *паралелограми*
Пр — *прямокутники*
Р — *ромби*
К — *квадрати*
Т — *трапеції*

Мал. 10

Властивості паралелограма:

– кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні і дорівнює їй;

– кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту;

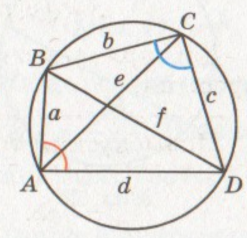
– кожна діагональ паралелограма точкою перетину ділиться навпіл;

– сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

Окремі види паралелограмів – *прямокутники, ромби, квадрати* – мають додаткові властивості:

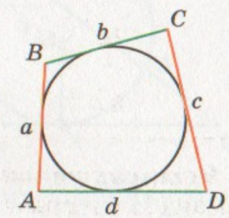
– діагоналі прямокутника (квадрата) рівні;

– діагоналі ромба (квадрата) перпендикулярні і лежать на бісектрисах його кутів.



Мал. 11

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, – *трапеція.* Паралельні сторони трапеції – її основи, дві інші – бічні сторони. Окремі види трапецій – рівнобічні і прямокутні трапеції. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, – її *середня лінія.* Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.



Мал. 12

Співвідношення між окремими видами чотирикутників показано на малюнку 10.

Вписані й описані чотирикутники (мал. 11 і 12)

Вид чотирикутника	Співвідношення між сторонами	Співвідношення між кутами
Вписаний у коло	$ac + bd = ef$	$A + C = B + D$
Описаний навколо кола	$a + c = b + d$	$ab\sin^2\frac{B}{2} = cd\sin^2\frac{D}{2}$

Площі чотирикутників. Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін: $S = ab$.

Площа паралелограма:

$$S = ah_a, \text{ або } S = ab\sin\gamma,$$

де a, b – його сторони, γ – кут між ними, h_a – висота, опущена на сторону a.

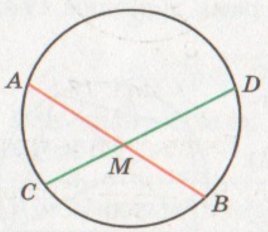
Якщо діагоналі чотирикутника дорівнюють d_1 і d_2, а кут між ними α, то його площа

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha.$$

Площа ромба дорівнює $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$.

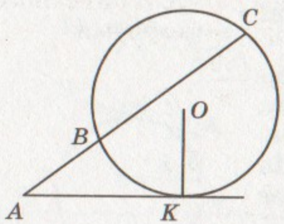
Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$



Мал. 13

Коло. Кути та відрізки, пов'язані з колом. Коло – фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки – *центра кола*. Частина площини, обмежена колом, – *круг*. *Радіус* – відрізок, що сполучає будь-яку точку кола з його центром. Відрізок, що сполучає дві довільні точки кола, називають *хордою*. Хорда, що проходить через центр кола, – *діаметр*.

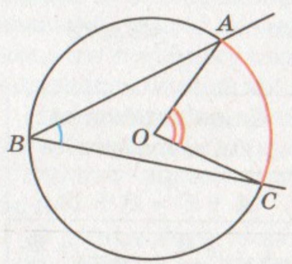


Мал. 14

Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку і лежить у площині кола, називається *дотичною* до кола.

Мають місце такі властивості:

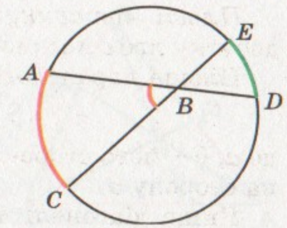
- діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї;
- дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику;
- відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки, рівні;
- $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ (мал. 13);
- $AK^2 = AB \cdot AC$ (мал. 14);
- вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається (мал. 15):



Мал. 15

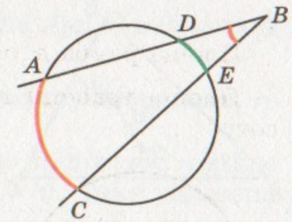
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC};$$

- $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{DE})$ (мал. 16);
- $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{DE})$ (мал. 17);
- кут між хордою кола і дотичною, проведеною в її кінці, вимірюється половиною дуги, що міститься всередині кута.



Мал. 16

Довжину кола C радіуса r визначають за формулою $C = 2\pi r$. Довжину l дуги кола радіуса r, яка має n градусів, можна визначити за формулою $l = \frac{\pi r n}{180}$.



Мал. 17

Площу S круга радіуса r знаходять за формулою $S = \pi r^2$.

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором*, а частину круга, обмежену його хордою і дугою, – *сегментом*. Сегмент може бути меншим від півкруга або більшим. Півкруг – один з видів сектора і сегмента. Якщо сектор круга радіуса r має n градусів, то його площа $S_{\text{сек}} = \frac{\pi r^2 n}{360}$. Площа довільного сегмента дорівнює сумі або різниці площ сектора і трикутника.

Сторона a_n правильного n-кутника через радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола виражається формулами

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$

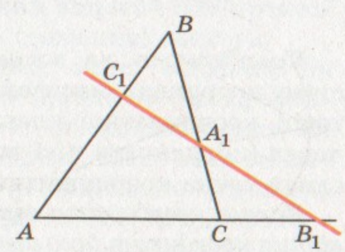
Зокрема,

$$a_3 = R\sqrt{3},\ a_4 = R\sqrt{2},\ a_6 = R.$$

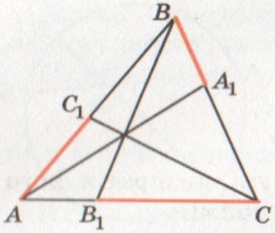
$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ a_4 = 2r,\ a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Теорема Птолемея. У кожному опуклому чотирикутнику $ABCD$, вписаному в коло, добуток довжин діагоналей дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін, тобто $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (див. мал. 11).

Теорема Менелая. Нехай A_1, B_1, C_1 – три точки, які лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB $\triangle ABC$ або на їх продовженнях (мал. 18). Точки A_1, B_1, C_1 тоді і тільки тоді



Мал. 18



Мал. 19

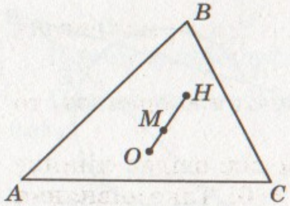
лежать на одній прямій, коли, враховуючи напрями відрізків,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

Теорема Чеви. Нехай A_1, B_1, C_1 – три точки, які лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB $\triangle ABC$ або на їх продовженнях (мал. 19). Для того щоб прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетиналися в одній точці або були всі паралельні, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

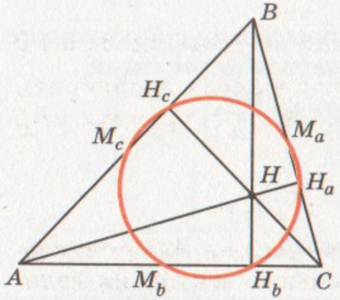
Останню рівність називають *умовою Чеви*.



Мал. 20

Пряма Ейлера. Ортоцентр H трикутника, його центроїд M і центр O описаного кола лежать на одній прямій (мал. 20), причому $OM : MH = 1 : 2$.

Коло Ейлера (коло дев'яти точок). Основи висот трикутника, середини його сторін і середини відрізків, які сполучають ортоцентр трикутника з його вершинами, лежать на одному колі (мал. 21). Центр цього кола збігається із серединою відрізка, який сполучає ортоцентр трикутника і центр описаного кола. Його радіус дорівнює половині радіуса описаного кола.



Мал. 21

Пряма Сімсона. Основи перпендикулярів, опущених на сторони трикутника з точки описаного кола, лежать на одній прямій.

Коло Аполлонія. Геометричним місцем точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок стале, є коло.

Координати на площині. Площину, на якій задано систему координат, називають *координатною площиною*. Кожній точці координатної площини відповідає єдина пара дійсних чисел (координати цієї точки), а кожній парі дійсних чисел – єдина точка координатної площини.

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців. Тобто якщо кінці відрізка $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то серединою даного відрізка є точка з координатами

$$\frac{x_1+x_2}{2} \text{ і } \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проекцій на дві взаємно перпендикулярні прямі.

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури і тільки вони.

Рівняння кола радіуса r із центром у точці $A(a; b)$ має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Якщо центр кола радіуса r лежить у початку координат, то його рівняння $x^2+y^2=r^2$.

Кожній прямій координатної площини відповідає лінійне рівняння з двома змінними $ax+by+c=0$. Таке рівняння називають *загальним рівнянням прямої*.

Рівність $y=kx+b$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*. Тут $k=\text{tg}\,\alpha$, де α – кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі OX.

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – *рівняння прямої, що проходить через дві дані точки* $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – *рівняння прямої у відрізках на осях* (числа a і b показують, які відрізки пряма l відтинає на осях координат).

Якщо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями $y_1=k_1x+b_1$ і $y_2=k_2x+b_2$, то:

1) $l_1 \parallel l_2$ тоді і тільки тоді, коли $k_1=k_2$;
2) $l_1 \perp l_2$ тоді і тільки тоді, коли $k_1\cdot k_2=-1$.

Векторні величини – ті, які визначаються не тільки числовими значеннями, а й напрямами. Значення векторних величин – *вектори*. Геометрично вектори (ненульові) зображаються *напрямленими відрізками*. Напрямлений відрізок має початок і кінець. Відстань між ними – *модуль* (довжина) вектора.

Два вектори називають *колінеарними*, якщо відповідні їм напрямлені відрізки розташовані на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори бувають співнапрямленими або протилежно напрямленими. Два вектори *рівні*, якщо вони співнапрямлені і мають рівні модулі. Два вектори називають *протилежними*, якщо вони мають рівні модулі і протилежно напрямлені.

Координатами вектора з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x=x_2-x_1$ і $y=y_2-y_1$.

Записують такий вектор у вигляді:
$\overrightarrow{AB} = (x;\ y)$, або $\vec{a} = (x;\ y)$, або $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB} = (x;\ y)$ позначають символом $|\overrightarrow{AB}|$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Сумою векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$. Для додавання векторів виконуються переставний і сполучний закони.

Геометрично додавати вектори можна за правилом трикутника або паралелограма (мал. 22 і 23). Завжди правильні векторні рівності:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Різницею векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ називають вектор $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$.

Різниця векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{KP}$ дорівнює $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PK}$. *Щоб відняти від одного вектора другий, треба до першого додати вектор, протилежний другому.*

Які не були б вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, завжди $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Добутком вектора $\vec{a} = (x;\ y)$ на число n називають вектор $n\vec{a} = (nx;\ ny)$. Завжди правильні рівності:

$$(n + m)\,\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a} \text{ і } n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}.$$

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi.$$

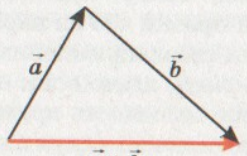
Якщо хоч один з векторів нульовий, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Кут φ між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти, користуючись формулою $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

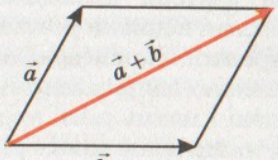
Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

$\vec{a} = k\vec{b}$ або $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ – умова колінеарності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $(k \neq 0)$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ або $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ – умова їх перпендикулярності.



Мал. 22



Мал. 23

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке геометрія? Що таке планіметрія?
2. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що означають записи $A \in a$, $B \notin a$?
4. Як слід розуміти вислів «точка B лежить між A і C»?
5. Що таке промінь? Як позначають промені?
6. Що таке відрізок? Що таке кінці відрізка?
7. Що таке відстань між двома точками?
8. Яка фігура називається кутом? Як позначають кути?
9. Який кут називають гострим? Прямим? Тупим? Розгорнутим?
10. Які кути називають суміжними? Чому дорівнює їх сума?
11. Які кути називають вертикальними?
12. Сформулюйте теорему про вертикальні кути.
13. Які прямі називають перпендикулярними?
14. Сформулюйте означення паралельних прямих.
15. Сформулюйте ознаку паралельності прямих.
16. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
17. Що таке трикутник? Назвіть елементи трикутника.
18. Якими бувають трикутники?
19. Що таке бісектриса, медіана, висота трикутника?
20. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.
21. Сформулюйте ознаки рівності трикутників.
22. Який трикутник називають рівнобедреним?
23. Сформулюйте кілька властивостей рівнобедреного трикутника.
24. Як називають сторони прямокутного трикутника?
25. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.
26. Що таке перпендикуляр, похила, проекція похилої?
27. Що таке відстань від точки до прямої?
28. Що таке коло? Центр? Радіус? Діаметр? Хорда?
29. Що таке круг? Чим відрізняється круг від кола?
30. Сформулюйте означення і властивість дотичної до кола.
31. Що таке центральний кут? Вписаний кут?

2-Geometrija.10kl.

32. Сформулюйте теорему про вписані кути.
33. Як побудувати трикутник за трьома даними сторонами?
34. Як побудувати кут, що дорівнює даному?
35. Як побудувати бісектрису даного кута?
36. Як поділити даний відрізок навпіл?
37. Як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? А паралельну даній прямій?
38. Що таке геометричне місце точок? Наведіть приклади.
39. Що таке серединний перпендикуляр даного відрізка?
40. Як навколо даного трикутника описати коло?
41. Як у даний трикутник вписати коло?
42. Що таке чотирикутник?
43. Сформулюйте означення паралелограма.
44. Які властивості має паралелограм?
45. Сформулюйте ознаки паралелограма.
46. Що таке прямокутник? Які властивості має прямокутник?
47. Що таке ромб? Квадрат? Назвіть їх властивості.
48. Сформулюйте теорему Фалеса.
49. Сформулюйте теорему про середню лінію трикутника.
50. Що таке трапеція? Рівнобічна трапеція? Прямокутна трапеція?
51. Сформулюйте теорему про середню лінію трапеції.
52. Які трикутники називають подібними?
53. Сформулюйте ознаки подібності трикутників.
54. Сформулюйте теорему Піфагора.
55. Як знайти координати середини відрізка?
56. Як знайти відстань між точками з даними координатами?
57. Що таке рівняння фігури?
58. Яке рівняння має коло? Пряма?
59. Наведіть приклади векторних величин.
60. Як зображають вектори?
61. Що таке координати вектора?
62. Що таке довжина вектора?
63. Які вектори називають рівними? Колінеарними? Протилежними?

64. Що таке сума двох векторів?
65. Сформулюйте правило трикутника для додавання векторів.
66. Сформулюйте правило паралелограма для додавання векторів.
67. Що таке різниця векторів? Як її знаходять?
68. Сформулюйте правило множення вектора на число.
69. Сформулюйте властивості множення вектора на число.
70. Що таке синус, косинус, тангенс кута?
71. Сформулюйте теорему косинусів.
72. Сформулюйте теорему синусів.
73. Що таке многокутник?
74. Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?
75. Сформулюйте означення правильного многокутника.
76. За якою формулою знаходять довжину кола?
77. Що таке площа многокутника?
78. За якими формулами обчислюють площі прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції?
79. Сформулюйте теорему про відношення площ подібних многокутників.
80. За якою формулою знаходять площу круга?

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

Тематичні завдання в тестовій формі

Прямі і кути

1. Установіть, на скільки частин можуть розбити площину дві її прямі.
а) На 2 або на 3; б) на 2 або на 4;
в) на 3 або на 4; г) на 3 або на 5.
2. Якщо один із суміжних кутів на 80° більший від другого, то другий кут дорівнює:
а) 80°; б) 140°; в) 50°; г) 120°.
3. Відомо, що $a \perp c$ і $b \perp c$. Укажіть правильне відношення.
а) $a \perp b$; б) $a \cap b$; в) $a \parallel b$; г) $a \in b$.
4. Кут між однією з двох паралельних прямих і їх січною дорівнює 60°. Під яким кутом бісектриса цього кута перетинає другу пряму?
а) 60°; б) 40°; в) 30°; г) 120°.

5. Скільки прямих можна провести через дві різні точки?
а) Одну; б) дві; в) три; г) жодної.

6. Вписаний кут, що спирається на діаметр, дорівнює:
а) 180°; б) 80°; в) 45°; г) 90°.

7. Яким знаком не позначають взаємне розташування двох прямих?
а) $a \perp b$; б) $a \in b$; в) $a \parallel b$; г) $a \cap b$.

8. Прямі a і b не паралельні прямій c. Чи випливає з цього, що прямі a і b не паралельні?
а) Так; б) ні; в) так, якщо $a \perp c$; г) ні, якщо $b \perp c$.

9. Скільки пар вертикальних кутів утворюють три прямі, що перетинаються в одній точці?
а) 3; б) 6; в) 9; г) 12.

10. На одній стороні кута відкладено три відрізки $AB = 2$, $BC = 3$ і $CD = 5$. Через точки A, B, C і D проведено паралельні прямі AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 до перетину з іншою стороною кута. Знайдіть B_1C_1, якщо $A_1D_1 = 20$.
а) 9; б) 6; в) 4; г) 10.

Трикутники

1. Якщо кути трикутника пропорційні числам 2, 3 і 4, то його найменший кут дорівнює:
а) 80°; б) 40°; в) 30°; г) 20°.

2. Найменший зовнішній кут прямокутного трикутника дорівнює:
а) 180°; б) 90°; в) 135°; г) 125°.

3. Площа рівностороннього трикутника зі стороною 2 дм дорівнює:
а) 4 дм^2; б) $2\sqrt{3}$ дм^2; в) $\sqrt{3}$ дм^2; г) $0{,}5\sqrt{3}$ дм^2.

4. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $AC = 3$ см, $\angle B = 30°$.
а) 3 см; б) 6 см; в) $\sqrt{3}$ см; г) 12 см.

5. Менша медіана прямокутного трикутника з катетами 5 см і 12 см дорівнює:
а) 2,5 см; б) 6,5 см; в) 6 см; г) 5 см.

6. У трикутнику провели три середні лінії. Скільки пар подібних трикутників утворилося?
а) 4; б) 6; в) 10; г) 12.

7. За якою формулою обчислюють радіус кола, вписаного в трикутник?
а) $\frac{abc}{4R}$; б) $\frac{4S}{abc}$; в) $\frac{S}{p}$; г) $\frac{p}{S}$.

8. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює $\sqrt{20}$, а бісектриса, опущена на неї:
а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{10}$.

9. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 14 см, а кут між ними 30°.
а) 42 см^2; б) $21\sqrt{3}$ см^2; в) $21\sqrt{2}$ см^2; г) 21 см^2.

10. Площі двох подібних трикутників відносяться як 4 : 9. Як відносяться їхні сторони?
а) 16 : 81; б) 2 : 4,5; в) 1 : 2,5; г) 2 : 3.

Чотирикутники

1. Кількість осей симетрії квадрата дорівнює:
а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

2. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см, а її середня лінія:
а) 4 см; б) 7 см; в) 10 см; г) 3,5 см.

3. Периметр паралелограма дорівнює 16 см. Одна його сторона – 5 см, а друга:
а) 5 см; б) 6 см; в) 11 см; г) 3 см.

4. Знайдіть кути ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 7.
а) 30° і 70°; б) 20° і 140°; в) 40° і 140°; г) 80° і 280°.

5. Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо вона утворює з більшою стороною кут 30°.
а) 10 см; б) 5 см; в) 2,5 см; г) 20 см.

6. Знайдіть площу ромба, якщо його менша діагональ і сторона дорівнюють 4 м.
а) $4\sqrt{3}$ м^2; б) $6\sqrt{3}$ м^2; в) $8\sqrt{3}$ м^2; г) $2\sqrt{3}$ м^2.

7. Якщо бісектриса кута прямокутника ділить його на частини, площі яких пропорційні числам 1 і 3, то його суміжні сторони відносяться як:
а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : 4; г) 2 : 3.

8. Периметр рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.
а) 5 см; б) 6 см; в) 11 см; г) 3 см.

9. Знайдіть найбільший кут прямокутної трапеції, якщо один з її кутів удвічі більший за інший.
а) 130° або 170°; б) 120° або 135°;
в) 140° або 145°; г) 180° або 128°.

10. Один з кутів ромба дорівнює 120°, а периметр 24 см. Менша діагональ ромба дорівнює:
а) 2 см; б) 3 см; в) 4 см; г) 6 см.

Коло і круг

1. Довжина чверті кола радіуса 2π м дорівнює:
а) π^2 м; б) 16π м; в) 2 м; г) 4π м^2.

2. Площа круга дорівнює 100π см^2. Знайдіть довжину його кола.
а) 100π см; б) 50π см; в) 20π см; г) 2500π см.

3. Кут між двома радіусами кола дорівнює 125°. Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.
а) 125°; б) 95°; в) 35°; г) 55°.

4. Під яким кутом із центра кола, вписаного в рівносторонній трикутник, видно сторону цього трикутника?
а) 30°; б) 60°; в) 90°; г) 120°.

5. Радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника з периметром 24 см, дорівнює:
а) 12 см; б) 3 см; в) 6 см; г) 4 см.

6. Кола радіусів 3 м і 7 м мають внутрішній дотик. Відстань між їхніми центрами:
а) 2 м; б) 10 м; в) 4 м; г) 5 м.

7. Знайдіть площу кільця, утвореного концентричними колами радіусів 3 м і 5 м.
а) 2 м^2; б) 16π м^2; в) 2π м^2; г) 4π м^2.

8. Сторона квадрата, описаного навколо кола завдовжки 16π см, дорівнює:
а) 16 см; б) 8 см; в) 4 см; г) $4\sqrt{2}$ см.

9. Правильний трикутник ABC вписаний у коло. Знайдіть довжину кола, якщо довжина дуги BAC дорівнює 6 см.
а) 12π см; б) 12 см; в) 9 см; г) $4\sqrt{3}$ см.

10. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см з центральним кутом 60°.
а) 6π см^2; б) 3π см^2; в) 9π см^2; г) 2π см^2.

Координати на площині

1. Середина відрізка KP, де K (1; −3), P (7; 5), має координати:
а) (−1; 3); б) (4; 1); в) (2; 1); г) (3; 4).

2. Який знак слід поставити в запису $AC * BC$ замість зірочки, якщо $A(-1; 3)$, $B(5; 6)$, $C(2; 4{,}5)$?
а) $>$; б) $<$; в) $=$; г) $\neq$.

3. Яка з точок не належить прямій $2x + y = 7$?
а) (−2; 11); б) (−0,5; 8); в) (2; 5); г) (0,5; 6).

4. Прямій $y = \frac{1}{2}x + 5$ паралельна пряма:
а) $y = 5$; б) $3x + y = 4$; в) $2y - x = 2$; г) $x + 3y = 6$.

5. Пряма $x + y = 5$ утворює з додатним напрямом осі OX кут:
а) 90°; б) 45°; в) 135°; г) 30°.

6. Центр кола $x^2 + (y - 2)^2 - 8 = 0$ має координати:
а) (0; 4); б) (1; 2); в) (0; 2); г) (2; 4).

7. Точка M, яка лежить на осі OX та рівновіддалена від точок $A(5; 4)$ і $B(2; 1)$, має координати:
а) (0; 4); б) (1; 0); в) (0; 2); г) (6; 0).

8. Коло з діаметром AB, де $A(4; 3)$, $B(-4; -3)$, має рівняння:
а) $x^2 + y^2 = 5$; б) $x^2 + y^2 = 9$;
в) $x^2 + y^2 = 25$; г) $x^2 + y^2 = 3$.

9. Якщо діаметр кола $x^2 + y^2 = 25$ проходить через точку $A(3; 4)$, то його рівняння:
а) $3x + 4y = 25$; б) $3y = 4x$;
в) $y + x = 5$; г) $4x + 3y = 0$.

10. Яка з прямих не є дотичною до кола $x^2 + (y - 2)^2 = 9$?
а) $x = 3$; б) $y = 3$; в) $x = -3$; г) $y = -1$.

Вектори

1. Якщо $A(1; -3)$ і $B(-7; 12)$, то вектор $\overline{AB}$ має координати:
а) (6; −15); б) (−8; 15); в) (−8; 9); г) (−6; 9).

2. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то:
а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$;
в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; г) $\vec{a} : \vec{b} = \vec{0}$.

3. Знайдіть координати вектора $\vec{m} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, якщо $\vec{p} = (-2; 1)$, $\vec{q} = (4; -3)$.
а) (8; −7); б) (−14; 0); в) (8; 11); г) (−2; 3).

4. Знайдіть довжину вектора $\vec{a} = (-2; 4)$.
а) $2\sqrt{10}$; б) 20; в) 12; г) $2\sqrt{5}$.

5. Вектор, колінеарний вектору $\vec{a} = (-1; 4)$, має координати:
а) (–2; –8); б) (0,5; 2); в) (3; –3); г) (4; –16).

6. Сумою векторів $\overline{BC} + \overline{AB} + \overline{DA} + \overline{CD}$ є вектор:
а) $\overline{AB}$; б) $\overline{AC}$; в) $\vec{0}$; г) $\overline{AD}$.

7. Якщо скалярний добуток двох одиничних векторів дорівнює 0,5, то кут між ними:
а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 45°.

8. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (-2; 6)$ і $\vec{b} = (9; m)$ перпендикулярні?
а) –3; б) 27; в) 3; г) –27.

9. При якому значенні x вектори $\vec{m} = (3; x)$ і $\vec{n} = (-6; 7)$ колінеарні?
а) 14; б) 3,5; в) –3,5; г) –14.

10. Проекції вектора $\overline{AB}$ на осі x і y дорівнюють відповідно a і b, а проекція вектора $\overline{BA}$ на вісь y дорівнює:
а) $-a$; б) $-b$; в) b; г) a.

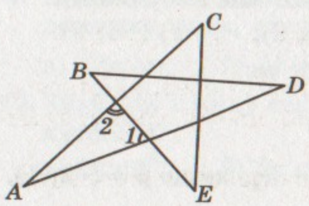
§2 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Планіметричні задачі бувають різних видів, здебільшого – на обчислення, побудову, доведення чи дослідження. У ***задачах на обчислення*** найчастіше вимагається знайти значення геометричної величини: відстань, довжину дуги, міру кута, периметр чи площу фігури.

ЗАДАЧА 1. Знайдіть суму кутів A, B, C, D, E зірки, зображеної на малюнку 24.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним. Тому, позначивши на малюнку два кути цифрами *1* і *2*, маємо:

$\angle B + \angle D = \angle 1$, $\angle C + \angle E = \angle 2$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle A + \angle 1 + \angle 2 = 180°$.



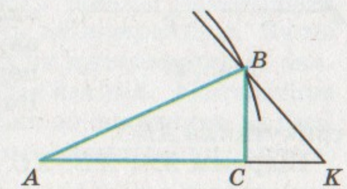
Мал. 24

ВІДПОВІДЬ. Сума кутів кожної такої п'ятикутної зірки дорівнює 180°.

У ***задачах на побудову*** вимагається побудувати фігуру зі вказаними властивостями. Класичними вважають побудови, виконувані тільки лінійкою і циркулем. При цьому часто використовують методи геометричних місць, подібності, паралельного перенесення, симетрії тощо.

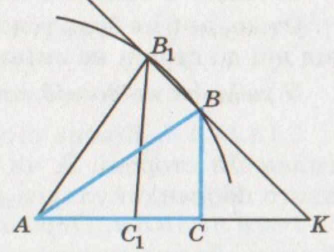
ЗАДАЧА 2. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою c і сумою двох катетів m.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Аналіз. Припустимо, що потрібний трикутник ABC побудовано (мал. 25). Добудувавши до нього прямокутний рівнобедрений трикутник BCK, матимемо трикутник ABK, у якого $\angle K = 45°$, $AK = m$ і $AB = c$ – відомі відрізки. За двома даними сторонами і кутом K трикутник ABK побудувати можна. Провівши в ньому перпендикуляр BC, можна визначити третю вершину C трикутника ABC.



Мал. 25

Побудова. Відкладаємо відрізок $AK = m$. При одному його кінці будуємо кут $AKB = 45°$, а з другого, як із центра, проводимо дугу кола радіуса $AB = c$. Якщо ця дуга перетинає промінь KB у точці B, проводимо перпендикуляр BC до AK. Трикутник ABC той, який вимагалося побудувати.



Мал. 26

ДОВЕДЕННЯ. За побудовою $AC \perp BC$, $AB = c$ і $AC + CB = AC + CK = AK = m$.

Дослідження. Якщо $c \geq m$, то згідно з нерівністю трикутника розв'язків не існує.

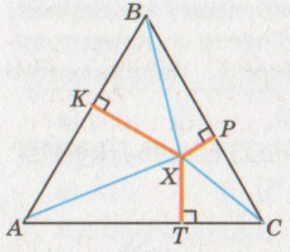
Якщо $c < \frac{m\sqrt{2}}{2}$, то дуга кола не має з променем KB спільних точок, а тому розв'язків немає.

Якщо $\frac{m\sqrt{2}}{2} \leq c < m$, то задача має один розв'язок:

при $c = \frac{m\sqrt{2}}{2}$ коло і промінь KB дотикаються;

в інших випадках, хоч дуга з променем і перетинаються у двох точках (мал. 26), але утворені при цьому трикутники ABC і AB_1C_1 рівні.

У ***задачах на доведення*** пропонується довести яке-небудь твердження.



Мал. 27

ЗАДАЧА 3. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки X внутрішньої області правильного трикутника до його сторін стала, тобто не залежить від положення цієї точки.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай ABC – правильний трикутник зі стороною a і висотою h, X – довільна точка у його внутрішній області, а XK, XP, XT – перпендикуляри до AB, BC, AC (мал. 27). Виразимо двома способами площу S трикутника ABC.

Відрізки XA, XB, XC даний трикутник розбивають на три трикутники з основами AB, BC, CA і висотами XK, XP, XT. Їх подвоєні площі дорівнюють $a \cdot XK$, $a \cdot XP$, $a \cdot XT$, а подвоєна площа всього трикутника $a \cdot h$. Отже,

$a \cdot XK + a \cdot XP + a \cdot XT = a \cdot h$, звідси $XK + XP + XT = h$.

Отже, де б не була точка X (усередині $\triangle ABC$), сума відстаней від неї до сторін не змінюється і дорівнює h.

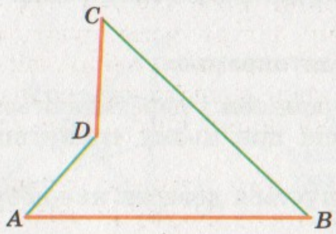
У *задачах на дослідження* пропонується дослідити що-небудь.

ЗАДАЧА 4. Кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні. А чи існує чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони?

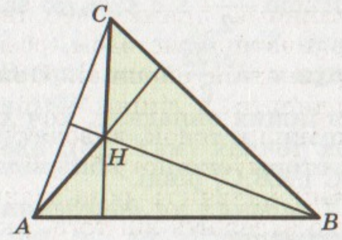
РОЗВ'ЯЗАННЯ. *Перший спосіб.* Спробуємо накреслити хоча б один з таких чотирикутників. Нехай AB і CD – його протилежні сторони – перпендикулярні відрізки. Провівши відрізки AD і BC, утворимо чотирикутник $ABCD$, у якого $AB \perp CD$ (мал. 28). Дві інші його сторони AD і BC можуть бути не перпендикулярні. Але продовживши або вкоротивши відрізок AB, можна досягти, щоб і вони стали перпендикулярними.

ВІДПОВІДЬ. Чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони, існує.

Другий спосіб. Нехай ABC – довільний гострокутний трикутник, а його висоти перетинаються в точці H (мал. 29).



Мал. 28



Мал. 29

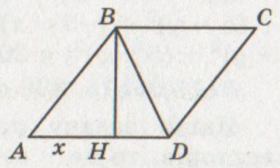
Зафарбуємо неопуклий чотирикутник $ABCH$. Кожна його сторона перпендикулярна до протилежної сторони.

Другий спосіб продуктивніший: він додатково показує, що в такого чотирикутника діагоналі перпендикулярні. А отже, середини сторін чотирикутника $ABCH$ – вершини прямокутника, а площа чотирикутника $ABCH$ дорівнює півдобутку діагоналей тощо.

Якщо в розв'язанні використовують тільки геометричні відомості, таке розв'язання називають *геометричним*. Якщо ж використовують відомості з алгебри чи математичного аналізу, то кажуть про *аналітичне розв'язання*. Найчастіше аналітичне розв'язання задачі зводиться до складання за умовою геометричної задачі відповідних рівнянь чи систем рівнянь.

ЗАДАЧА 5. Знайдіть площу ромба, якщо його висота і менша діагональ відповідно дорівнюють 12 см і 13 см.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $ABCD$ – ромб (мал. 30), а BH і BD – його висота і діагональ. Тоді $BH = 12$ см, $BD = 13$ см, а $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см).



Мал. 30

Нехай $AH = x$. Тоді $AB = AD = AH + HD = x + 5$.

З $\triangle ABH$ $AB^2 = BH^2 + AH^2$. Можемо скласти рівняння:

$(x + 5)^2 = 12^2 + x^2$, або $x^2 + 10x + 25 = 144 + x^2$, звідси $x = 11{,}9$ (см).

Маємо $AB = x + 5 = 11{,}9 + 5 = 16{,}9$ (см). Знайдемо тепер площу S ромба $ABCD$.

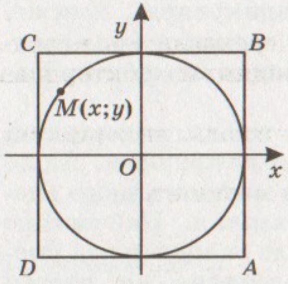
$S = BH \cdot AD$, тобто $S = 12 \cdot 16{,}9 = 202{,}8$ (см^2).

ВІДПОВІДЬ. $S = 202{,}8$ см^2.

Ефективними методами розв'язування геометричних задач є координатний і векторний методи.

Координатний метод полягає в тому, що розв'язуючи геометричну задачу, оперують координатами окремих точок, рівняннями прямих або інших ліній. Розв'язуючи задачу координатним методом, розглядувані фігури розміщують на координатній площині. Приписавши окремим точкам фігур координати, а лініям — рівняння, далі обчислюють координати інших точок, виводять рівняння інших ліній. У результаті отримуємо потрібну відповідь.

Раціональність розв'язання задачі цим методом значною мірою залежить від того, як розглядувану фігуру розмістити відносно координатних осей. Найзручніше цим методом користуватися тоді, коли в задачі мова йде про прямі кути або суми квадратів якихось відстаней.



Мал. 31

ЗАДАЧА 6. Знайдіть суму квадратів відстаней від довільної точки кола радіуса 5 см до вершин описаного навколо нього квадрата.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Коло радіуса 5 см і описаний навколо нього квадрат розмістимо в системі координат так, щоб її осі були серединними перпендикулярами для сторін квадрата (мал. 31). Тоді колу відповідатиме рівняння $x^2 + y^2 = 25$, а вершини квадрата матимуть координати $A(5; -5)$, $B(5; 5)$, $C(-5; 5)$, $D(-5; -5)$.

Якщо $M(x; y)$ – довільна точка кола, то $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (5 - x)^2 + (-5 - y)^2 + (5 - x)^2 + (5 - y)^2 + (-5 - x)^2 + (5 - y)^2 + (-5 - x)^2 + (-5 - y)^2 = 2((5 - x)^2 + (5 + x)^2 + (5 + y)^2 + (5 - y)^2) = 200 + 4(x^2 + y^2) = 300$ (см^2).

ВІДПОВІДЬ. 300 см^2.

Якщо задачу розв'язують, використовуючи властивості векторів, то це – векторний метод розв'язування задачі. Для ефективного його застосування слід уміти геометричні співвідношення (властивості геометричних фігур) записувати у вигляді векторних рівностей. При цьому часто використовують такі твердження та векторні рівності:

1) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ – точки A і B збігаються;
2) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ – прямі AB і CD паралельні або збігаються;
3) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ – точки A, B, C лежать на одній прямій;
4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ – прямі AB і CD перпендикулярні;
5) $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{n}\overrightarrow{MB}$, а числа m і n додатні – точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$;
6) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$ – кут між прямими, на яких лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює φ;
7) $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$ – M – середина відрізка AB;
8) $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$ – M – точка перетину медіан трикутника ABC;
9) $\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$ – точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$.

Користуючись цими співвідношеннями, можна розв'язувати багато геометричних задач та доводити теореми.

Розв'язування задачі векторним методом складається з кількох кроків:

– подані в задачі співвідношення «перекладають мовою» векторів, тобто записують їх відповідними векторними рівностями;

– отримані векторні рівності перетворюють, використовуючи правила векторної алгебри;

– від мови векторів переходять до мови геометрії.

ЗАДАЧА 7. Точка перетину прямих, яким належать бічні сторони трапеції, та середини її основ лежать на одній прямій. Доведіть.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. На малюнку 32 зображено трапецію $ABCD$. Точки M і N – середини її основ, а O – точка перетину прямих AB і CD. Щоб довести, що точки M, N і O лежать на одній прямій, покажемо, що вектори $\overline{OM}$ і $\overline{ON}$ – колінеарні.

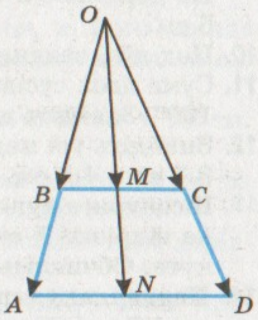
Оскільки M – середина BC, а N – середина AD, то виконуються рівності:

$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC})$ і $\overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OD})$.

Оскільки $\triangle OBC \backsim \triangle OAD$, то $OA : OB = OD : OC = k$. Звідси

$\overline{OA} = k\overline{OB}$, $\overline{OD} = k\overline{OC}$, $\overline{ON} = \frac{1}{2}(k\overline{OB} + k\overline{OC}) = \frac{1}{2}k(\overline{OB} + \overline{OC}) = k\overline{OM}$.

Маємо $\overline{ON} = k\overline{OM}$. Отже, точки M, N і O лежать на одній прямій.



Мал. 32

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

А

1. Через точку на площині проведено 3 прямі. Доведіть, що міри принаймні двох з утворених кутів менші за 61°.
2. Установіть вид трикутника, якщо його кути пропорційні числам 1, 2 і 3.
3. Визначте найбільший внутрішній кут трикутника, якщо його зовнішні кути (взяті по одному при вершині) пропорційні числам 2, 3 і 4.
4. Висота і медіана прямокутного трикутника, проведені з вершини прямого кута, ділять кут на три рівні частини.

Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеною із цієї вершини.

5. Точка O – спільна середина відрізків AD і BC. Пряма l, що проходить через точку O, перетинає відрізок AB у точці M, а відрізок CD у точці N. Доведіть:
а) $MO = NO$; б) $AM = DN$; в) $\angle DNO = \angle AMO$.

6. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено медіани AM і BN до бічних сторін. Доведіть:
а) $\triangle AMB = \triangle BNA$; б) $\triangle CAM = \triangle CBN$.

7. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено бісектриси AM і BN до бічних сторін. Доведіть:
а) $\triangle AMB = \triangle BNA$; б) $\triangle CAM = \triangle CBN$.

8. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого бічна сторона і висота, проведена до основи, дорівнюють відповідно 8 см і 6 см.

9. Побудуйте прямокутний трикутник, у якого один з катетів дорівнює 3 см, а медіана, проведена до іншого катета, 6 см.

10. Поділіть заданий відрізок на 7 рівних частин.

11. Сума двох сусідніх кутів опуклого чотирикутника дорівнює 100°. Знайдіть кут між бісектрисами двох інших його кутів.

12. Знайдіть усі медіани прямокутного трикутника з катетами 3,2 см і 4,8 см.

13. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки 5 см і 15 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчисліть периметр паралелограма.

14. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута до однієї з діагоналей прямокутника, поділяє її у відношенні 1:3. Доведіть, що одна зі сторін прямокутника дорівнює половині діагоналі.

15. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і $4\sqrt{6}$ см, а висота, проведена з їхньої спільної вершини, – 4 см. Знайдіть площу трикутника.

16. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця і середня лінія трапеції дорівнюють 10 м.

17. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси кутів трикутника.

18. Обчисліть кути рівнобічної трапеції, якщо синус одного з них дорівнює $0{,}5\sqrt{3}$.

19. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює 0,5. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

20. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює 5. Знайдіть синус і косинус цього кута.

21. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною 6 см і кутом при основі, косинус якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

22. Косинуси гострих кутів трапеції дорівнюють 0,8 і 0,6. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси його тупих кутів.

23. Знайдіть невідому сторону $\triangle ABC$, якщо:
а) $AB = 3$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
б) $AB = 6\sqrt{2}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 45°$.

24. Сторони трикутника пропорційні числам 7, 8 і 13. Знайдіть найбільший кут трикутника, якщо його периметр 56 см.

25. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 32 см, а одна зі сторін 14 см. Знайдіть периметр паралелограма і кут між його діагоналями.

26. Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 12 см. Знайдіть периметр і площу ромба.

27. Периметр ромба дорівнює 6,8 см, а одна з діагоналей 1,6 см. Знайдіть площу ромба.

28. Периметр паралелограма дорівнює 52 см, а його площа 60 см^2. Знайдіть сторони і висоти паралелограма, якщо його гострий кут 30°.

29. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 8 см і 18 см. Знайдіть радіус вписаного кола.

30. Бісектриса прямого кута трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 20 дм і 15 дм. Знайдіть площу трикутника.

31. Знайдіть діагоналі рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона 13 см.

32. Знайдіть кути опуклого п'ятикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4, 5, 7, 8.

33. Центральний кут правильного n-кутника у 4 рази менший за його внутрішній кут. Знайдіть n.

34. Накресліть коло діаметра 6 см. Впишіть у коло й опишіть навколо нього правильні n-кутники та обчисліть їх периметри, якщо: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

35. У коло вписано квадрат і правильний шестикутник. Периметр квадрата 24 см. Знайдіть периметр і площу шестикутника.

36. Навколо кола описано правильний трикутник, а в коло вписано правильний шестикутник, периметр якого 18 см. Знайдіть периметр і площу трикутника.

37. Дано правильний шестикутник зі стороною 4 см. Знайдіть ширину і площу кільця, утвореного колами, вписаним і описаним навколо шестикутника.

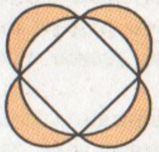
38. Знайдіть сторони та площу $\triangle ABC$, якщо $A(3; 4)$, $B(-3; 4)$, $C(-3; -4)$.

39. Дано $\triangle ABC$, у якого $A(7; 5)$, $B(4; 1)$, $C(-4; 7)$. Знайдіть довжини його медіан.
40. Відрізок MN точками K і P поділено на три рівні частини ($MK = KP = PN$). Знайдіть координати точки N, якщо $M(2; -4)$, $P(-6; 2)$.
41. На осі абсцис знайдіть точку M, яка рівновіддалена від початку координат і від точки $P(2; 3)$.
42. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; 4)$ і $B(-2; 1)$. Знайдіть площу трикутника, який відтинає ця пряма від осей координат.
43. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(3; 4)$, $B(6; -2)$, $C(-3; 1)$ – рівнобедрений. Знайдіть його площу.
44. Установіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(9; 7)$, $D(8; 2)$. Знайдіть його периметр і площу.
45. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $A(3; -5)$ відносно: а) точки (0; 0); б) осі абсцис; в) осі ординат.
46. Побудуйте два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектор $\vec{d}$ такий, що:
а) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$;
в) $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b}$; г) $\vec{d} = 2\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$.
47. Чи рівні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо $A(1; 6)$, $B(3; 2)$, $C(0; -1)$, $D(2; -5)$?
48. Знайдіть модуль вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0)$.
49. При яких значеннях x вектори $\vec{a} = (x; 2)$ і $\vec{b} = (4; 2x)$ колінеарні?
50. При яких значеннях x вектори $\vec{p} = (2; x)$ і $\vec{s} = (x; x + 3)$ перпендикулярні?

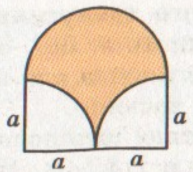
Б

51. По різні сторони від прямої MN позначено точки A і B так, що $MA = MB$ і $NA = NB$. Доведіть, що $AB \perp MN$.
52. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 30 см. Висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки у відношенні 7 : 18, починаючи від вершини. Знайдіть площі частин трикутника, на які його поділяє ця висота.
53. Сторона трикутника, медіана і висота, проведені до неї, дорівнюють відповідно 34, 25 і 24 см. Знайдіть периметр трикутника.
54. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 18 см. У якому відношенні діагоналі діляться точкою перетину?
55. Довжина кола збільшилася на 20 %. На скільки відсотків збільшиться площа вписаного в це коло правильного трикутника?

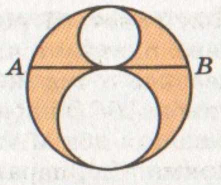
56. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а один з гострих кутів дорівнює 30°. Знайдіть радіус кола з центром у вершині цього кута, яке поділяє даний трикутник на дві рівновеликі частини.
57. Батько і дочка стоять одне навпроти одного. Їхні тіні відповідно дорівнюють 3 м і 2,5 м. Який зріст має дочка, якщо зріст батька 183 см?
58. Основи рівнобічної трапеції, в яку можна вписати коло, пропорційні числам 3 і 11. Знайдіть синуси кутів трапеції.
59. Знайдіть невідомі сторони $\triangle ABC$, якщо:
а) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
б) $AB = 6$ см, $AC = 4$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;
в) $AC - AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 120°$;
г) $AC = 6$ см, $BC = 14$ см, $\angle A = 60°$.
60. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 23 см і 30 см. Знайдіть довжину медіани, бісектриси і висоти, проведених до найбільшої сторони.
61. У трикутику ABC $AB = BC = 6$ см, $\sin A = 0{,}4$. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до центра кола, описаного навколо трикутника.
62. AL – бісектриса рівнобедреного $\triangle ABC$ ($AB = BC$), $BL = a$, $\angle A = 2\alpha$. Знайдіть сторони трикутника і довжини його бісектрис.
63. BM – медіана трикутника ABC, $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$. Знайдіть AB.
64. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 24 см. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл.
65. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки K і T так, що $AB = 10$ см, $AK = 2$ см, $BC = 14$ см, $TC = 9$ см. Знайдіть площу чотирикутника $AKTC$, якщо $S_{ABC} = 28$ см^2.
66. Основи рівнобічної трапеції $ABCD$ дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона – 13 см. Знайдіть радіуси кіл: а) описаного навколо трапеції; б) вписаного в $\triangle ABC$; в) вписаного в $\triangle ACD$.
67. Дано два круги з радіусами по 1 дм, відстань між їх центрами дорівнює $\sqrt{3}$ дм. Знайдіть площу спільної частини цих кругів.
68. Спільна хорда двох кругів стягує дуги 60° і 120°. Знайдіть відношення радіусів цих кругів.
69. Чотири серпики утворені колом, описаним навколо квадрата, і півколами, побудованими на сторонах квадрата як



Мал. 33



Мал. 34



Мал. 35

на діаметрах (мал. 33). Доведіть, що сума площ цих чотирьох серпиків дорівнює площі квадрата.

70. Знайдіть площу фігури, заштрихованої на малюнку 34.

71. На малюнку 35 зображено три різні попарно дотичні кола і хорда, яка дотикається до двох менших кіл у їх спільній точці. Знайдіть площу заштрихованої частини більшого круга, якщо довжина хорди a.

72. У круговий сектор AOB радіуса $OA = 10$ см вписано коло. Знайдіть відношення площ сектора і круга, якщо $S_{\triangle AOB} = 25\sqrt{3}$ см^2.

73. AK, BL, CM – медіани трикутника ABC. Знайдіть координати точки L, якщо $A(-3; -1)$, $B(-2; 1)$, $K(1; -1)$.

74. Знайдіть сторони та площу трикутника ABC, якщо $A(a; b)$, $B(-a; b)$, $C(-a; -b)$ і точка A лежить у III координатній чверті.

75. Дано трикутник ABC, у якого $A(7; 5)$, $B(4; 1)$, $C(-4; 7)$. Знайдіть довжини медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини B.

76. Використовуючи умову попередньої задачі, напишіть рівняння медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини B.

77. Точки $A(2; -5)$ і $C(2; -1)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Напишіть рівняння кола, вписаного в цей квадрат, та кола, описаного навколо нього. Знайдіть невідомі вершини квадрата.

78. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох кіл: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

79. Чи має трикутник ABC, у якого $A(-6; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(3; 2)$, вісь симетрії? Якщо має, то запишіть її рівняння.

80. AC – діагональ квадрата. Запишіть рівняння осей симетрії цього квадрата, якщо $A(1; 2)$, $C(5; 6)$.

81. Коло радіуса 3 дотикається до осей координат у I чверті. Запишіть рівняння цього кола і кола, симетричного даному відносно: а) початку координат; б) осі абсцис; в) осі ординат; г) прямої $y = 2x$.

82. O – точка перетину медіан рівностороннього трикутника ABC. При паралельному перенесенні точка A відобразилася на точку O. Виконайте паралельне перенесення $\triangle ABC$. Знайдіть периметр побудованого трикутника, якщо $S_{\triangle AOB} = S\sqrt{3}$.

83. При гомотетії відносно початку координат точка $A(1; 2)$ переходить у точку $A_1(3; 6)$. У яку точку при цій гомотетії перейде точка $B(3; -2)$? Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

84. Ромби $ABCD$ і $MNPK$ – подібні, $AC : BD = 4 : 5$. Знайдіть діагоналі ромба $MNPK$, якщо його площа дорівнює 40 см^2.

85. Пряма MN, паралельна основі AC трикутника ABC, ділить його на дві частини – трикутник і трапецію. Площі цих фігур пропорційні числам 1 і 3. Знайдіть периметр $\triangle ABC$, якщо периметр $\triangle MBN$ дорівнює 7 см.

86. Побудуйте три довільні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Побудуйте вектор $\vec{d}$ такий, що:
а) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$;
в) $\vec{d} = 0{,}5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$; г) $\vec{d} = \vec{a} + 0{,}5\vec{b} - 2\vec{c}$.

87. Знайдіть модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60°$.

88. Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(2; -1)$.

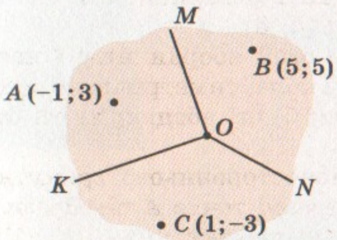
89. При яких значеннях a кут між векторами $\vec{m} = (6; a)$ і $\vec{b} = (-5; a - 1)$ тупий?

90. Знайдіть кут між одиничними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектор $5\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$.

91. Дано точки $A(4; -2)$ і $B(2; -5)$. Запишіть рівняння прямої, яка дотикається до кола діаметра AB у точці A.

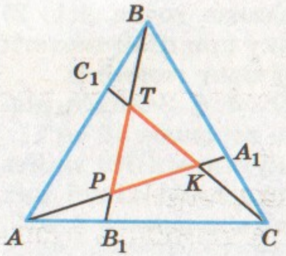
92. Запишіть рівняння дотичних, проведених з точки $A(5; 0)$ до кола $x^2 + y^2 = 9$.

93. На діаграмі Вороного зображено три антени A, B, C, їх координати та області обслуговування (мал. 36). Ребра OM, ON, OK клітин на діаграмі Вороного будуються як серединні перпендикуляри до відрізків AB, BC і AC. Запишіть рівняння ребер діаграми Вороного і координати точки O – вершини діаграми Вороного.

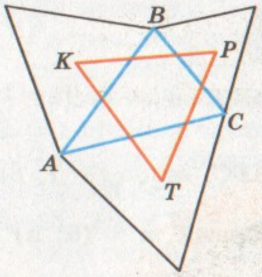


Мал. 36

Георгій Феодосійович
ВОРОНИЙ (1868–1908)



Мал. 37



Мал. 38

94*. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено точки A_1, B_1, C_1 такі, що $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2$ (мал. 37). Як відносяться площі трикутників ABC і KPT?

95*. На сторонах довільного трикутника ABC зовні нього побудовано правильні трикутники (мал. 38). Доведіть, що їх центри K, P, T – вершини правильних трикутників.

96. На основі AC трикутника ABC взято точки M і H такі, що $AM < AH$. Прямі BM і BH ділять медіану AK на три рівні частини. Знайдіть AC, якщо $MH = 3$.

97*. Протилежні сторони опуклого шестикутника паралельні. Доведіть, що прямі, які сполучають середини протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

98*. Пряма Ейлера проходить через центр вписаного у трикутник кола. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

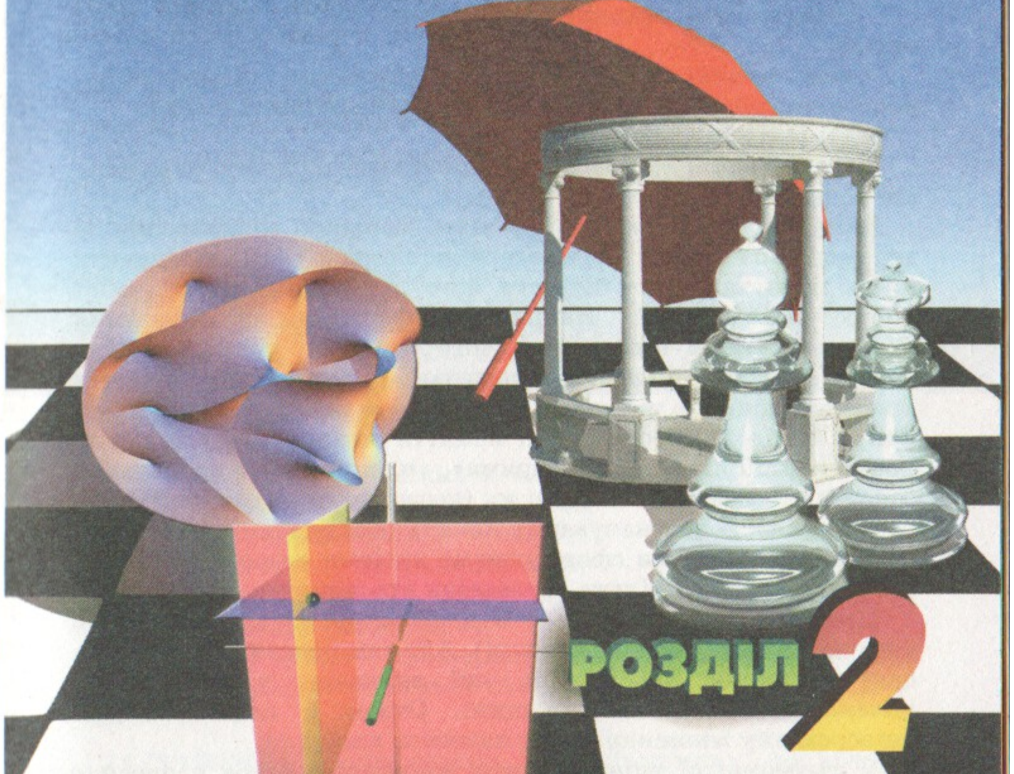
99*. Якщо вписане в трикутник коло дотикається до його сторін AB, BC, CA в точках A_1, B_1, C_1, то прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Доведіть.

100*. На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC зовні нього побудовано квадрати $ACKP$ і $CBMT$. Доведіть, що прямі AM, BP і висота CH трикутника перетинаються в одній точці.

Вступ до стереометрії

Основні теми розділу:

- Основні поняття стереометрії.
- Аксіоми стереометрії та наслідки з них.
- Просторові геометричні фігури.
- Початкові уявлення про многогранники.
- Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників.
- Поняття про аксіоматичний метод.



РОЗДІЛ 2

Математикам без аксіом і відомих уже теорем було б дуже важко просуватися вперед.

Г. Лейбніц

§3 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Геометрія – наука про властивості геометричних фігур. Вона складається з двох частин: планіметрії і стереометрії. У планіметрії розглядаються фігури в одній площині. Стереометрія (від грец. στερεοζ – просторовий і μετρεω – вимірюю) вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

Геометрична фігура – будь-яка множина точок. Скінченна або нескінченна, на площині або в просторі.

У стереометрії вивчаються властивості як плоских геометричних фігур, так і неплоских. Фігура називається *неплоскою* (просторовою), якщо не всі її точки лежать в одній площині. Приклади неплоских фігур: куб, паралелепіпед, куля.

Розглядають у стереометрії й інші геометричні поняття:

– *геометричні величини* (довжини, площі, об'єми, міри кутів);

– *геометричні перетворення* (паралельні перенесення, різні симетрії, повороти, перетворення подібності тощо);

– *вектори*;

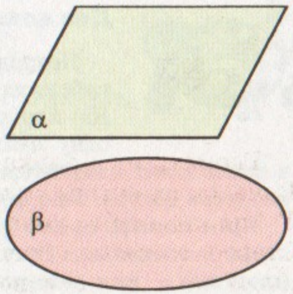
– *геометричні відношення* (перпендикулярності, паралельності, рівності, подібності тощо).

Зміст більшості наукових понять звичайно розкривають за допомогою означень. Але не все можна означити. Щоб означити якесь поняття, треба підвести його під інше поняття, зміст якого вже відомий. Наприклад, формулюючи означення «паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні», означуване поняття «паралелограм» підводять під уже відоме поняття «чотирикутник». А під які геометричні поняття можна підвести перші поняття, такі як «точка», «пряма», «площина»? Їх вводять без означень і називають *основними* (неозначуваними) поняттями.

Властивості неозначуваних понять розкривають за допомогою *аксіом*. Далі ми сформулюємо аксіоми стереометрії. Але спочатку зробимо кілька зауважень про поняття «площина».

Про площину говорять і в планіметрії (згадайте хоча б означення паралельних прямих). Але там розглядають тільки одну площину; усі фігури, які вивчають у планіметрії, належать цій єдиній площині. Отже, у планіметрії за універсальну множину точок служить *площина*.

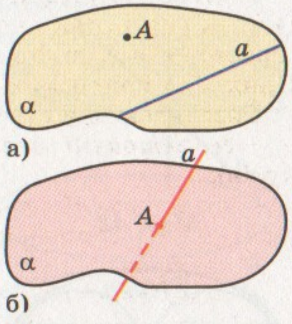
У стереометрії універсальною множиною точок є *простір* (тривимірний), у ньому існує безліч різних площин. Матеріальними моделями частини площини є, наприклад, поверхня віконного скла, добре відполірована поверхня стола, мармурової плити, поверхня аеродрому тощо. Зрозуміло, що це грубі моделі. У геометрії площину мислять необмеженою, ідеально рівною і гладенькою, що не має ніякої товщини.



Мал. 39

Зображають площини у вигляді паралелограмів або «шматків» площини, обмежених довільними замкненими лініями (мал. 39). Позначають їх зазвичай грецькими літерами α, β, γ, δ, ω тощо.

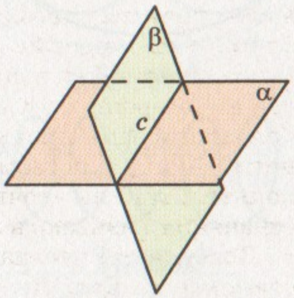
Як і будь-яка геометрична фігура, площина складається з точок. Якщо точка *A лежить* у площині α, кажуть, що площина α *проходить* через точку *A*, і записують: $A \in \alpha$. Запис $A \notin \alpha$ означає, що точка *A не лежить* у площині α. Якщо кожна з точок *A*, *B*, *C* (що не лежать на одній прямій) лежить у деякій площині α, то її можна позначати символом (*ABC*).



Мал. 40

Якщо кожна точка прямої *a* належить площині α, кажуть, що пряма *a лежить у площині* α, або *площина* α *проходить через пряму a*. За допомогою символів записують це так: $a \subset \alpha$. На малюнку 40, *а* зображено площину α, яка проходить через пряму *a* і точку *A*. Запис $b \not\subset \alpha$ означає, що пряма *b не лежить у площині* α.

Якщо пряма *a* і площина α мають тільки одну спільну точку *A*, кажуть, що вони *перетинаються в точці A*. Записують: $a \cap \alpha = A$. На малюнку невидиму частину прямої зображають штриховою лінією (мал. 40, *б*).



Мал. 41

Якщо через пряму *c* проходять дві площини α і β, кажуть, що ці площини перетинаються по прямій *c*. Записують: $\alpha \cap \beta = c$ (мал. 41).

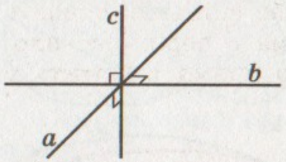
ЗАУВАЖЕННЯ. Коли кажуть «дві площини», то вважають, що вони різні, не збігаються. Так само розумітимемо вирази «дві точки», «дві прямі» тощо.

Для допитливих

Не слід до неплоских фігур відносити тільки такі, як куб, куля, циліндр, конус, які мають поверхню чи об'єм. Дві площини, які перетинаються (мал. 41), утворюють одну неплоску фігуру, три прямі, які перетинаються в одній точці і перпендикулярні кожна до кожної (мал. 42), – також неплоска фігура. Такі фігури не мають ні площі, ні об'єму.

Крім понять пряма і площина, нерідко розглядають ще поняття *лінія* і *поверхня*. Розуміють, що пряма – окремий вид ліній, а площина – вид поверхонь (мал. 43). Однак пояснити, що таке лінія і що таке поверхня, надто важко.

Різних ліній існує безліч, деякі з них мають окремі назви: коло, ламана, парабола, спіраль, гвинтова лінія (мал. 44). Відрізок, промінь, пряма – простіші приклади ліній. І різних поверхонь безліч: сфера, циліндрична, конічна, многогранна. Існують і досить цікаві поверхні: «лист Мебіуса» (мал. 45, *а*), «пляшка Клейна» (мал. 45, *б*) тощо. Їх розглядають у вищій геометрії. Площина та її частини (кут, смуга, трикутник, круг) – приклади простіших поверхонь.



Мал. 42

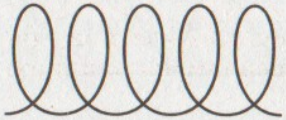
Символи ∈, ∉, ⊂, ⊄ використовують не лише в геометрії. Це – важливі символи теорії множин, на основі якої будують усю сучасну математику. Їх читають:

∈ – є елементом;
∉ – не є елементом;
⊂ – є частиною (підмножиною);
⊄ – не є підмножиною.

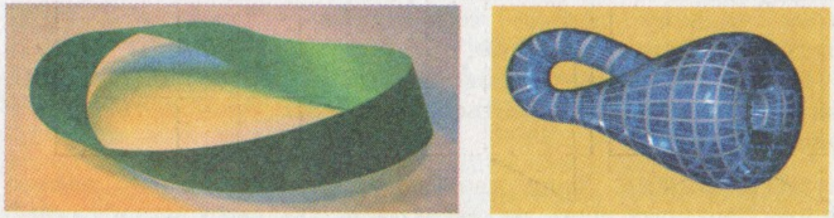
Мал. 43

Крім зазначених, часто використовують інші символи: ∅ – порожня множина; ∪ – об'єднання множин; ∩ – переріз множин.

Наприклад, якщо пряма *a* і площина α не мають спільних точок, то $a \cap \alpha = \varnothing$. $a \cup \alpha$ – множина точок (фігура), якій належать усі точки прямої *a* і площини α (мал. 40, *б*).



Мал. 44



а) *Мал. 45* б)

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Поясніть походження слова *стереометрія*.
2. Які фігури називають неплоскими?
3. Які поняття в стереометрії приймають без означень?
4. Що означають записи: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$?
5. Що означають записи: $a \subset \alpha$, $a \not\subset \beta$?

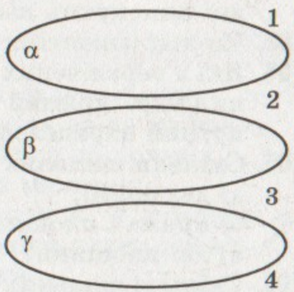
Виконаємо разом

1. Дано пряму *c* і площину α. Яким може бути $c \cap \alpha$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо пряма *c* не має спільних точок з площиною α, то $c \cap \alpha = \varnothing$. Якщо пряма *c* перетинає площину α в точці *A*, то $c \cap \alpha = A$. Якщо пряма *c* лежить у площині α, то $c \cap \alpha = c$.

2. На скільки частин можуть поділити простір три різні площини?

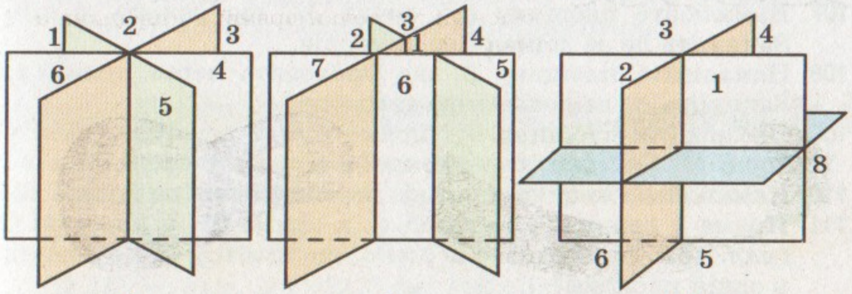
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо жодні дві з трьох даних площин не мають спільних точок (мал. 46), то вони поділяють простір на 4 частини. В інших випадках три площини можуть ділити простір на 6, 7 чи 8 частин (мал. 47).



Мал. 46

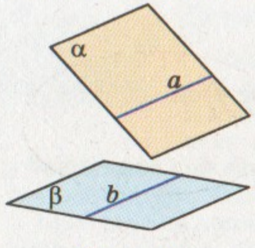
3. На прямій дано 27 різних точок. На скільки частин вони ділять пряму?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Одна внутрішня точка ділить пряму, промінь чи відрізок на 2 частини, дві точки – на 3 частини і т. д. Зі збільшенням на одиницю



а) б) в)

Мал. 47



Мал. 48

числа точок на прямій збільшується на одиницю і кількість частин прямої. Отже, 27 різних точок прямої ділять її на 28 частин. Дві із цих частин – промені, а решта – відрізки.

4. Чи правильні записи $a \in \alpha$, $b \in \beta$ (мал. 48)?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Ні. Слід писати $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

101. Наведіть приклади геометричних фігур:
а) плоских;
б) неплоских.

102. Чи є геометричними фігурами фігури вищого пілотажу, які виконують льотчики? А шахові фігури?

103. Чи відрізняються поняття «площина» і «площа»?

104. Які з перелічених фігур неплоскі: відрізок, коло, призма, циліндр, прямий кут, прямокутний трикутник, прямокутний паралелепіпед, площина?

105. Скільки спільних точок можуть мати:
а) дві прямі;
б) пряма і площина;
в) дві площини?

106. Скільки спільних точок можуть мати:
а) пряма і відрізок;
б) пряма і коло;
в) коло і площина?

А

107. Намалюйте площину α і точку M, що лежить у ній. Запишіть це за допомогою символів.

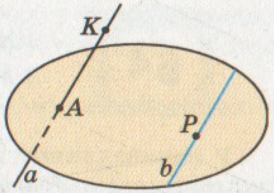
108. Намалюйте площину β, що проходить через пряму x. Запишіть це за допомогою символів.

109. Намалюйте площину α і пряму c, які перетинаються у точці M. Скільки точок прямої c лежить у площині α?

110. Намалюйте площини α і ω, що перетинаються по прямій m.

111. Пряма a лежить у площині α, а пряма b – у площині β (мал. 48). Чи випливає із цього, що прямі a і b не лежать в одній площині?

112. Пряма a проходить через точку A площини α. Чи випливає з цього, що пряма a перетинає площину α?



Мал. 49

113. Запишіть за допомогою символів взаємне розташування точок, прямих і площин, зображених на малюнку 49.

114. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:
а) По якій прямій перетинаються площини: 1) (ABC) і (AA_1D_1); 2) (AA_1B_1) і (AA_1D); 3) (BB_1C_1) і (CC_1D_1)?
б) Яким площинам належить точка: 1) A; 2) C_1; 3) D?
в) Чи належить точка B_1 площині: 1) (ABC); 2) (BB_1C_1); 3) $(A_1B_1C_1)$?

115. Накресліть трикутну піраміду $ABCD$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:
а) по якій прямій перетинаються площини (ABC) і (ABD)?
б) якій площині не належить точка B?
в) яким площинам належить пряма AC?

Б

116. Площини α, β, пряма a і точка A задовольняють такі умови: $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in \beta$, $A \notin \alpha$. Зобразіть це на малюнку.

117. Площини α, β, γ попарно перетинаються по прямих a, b і c, причому $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Зобразіть це на малюнку.

118. Пряма a перетинає площину α в точці A. У площині α дано ще точку B. Площина β проходить через пряму a і точку B. Зробіть відповідний малюнок.

119. Точки A і B лежать у площині α, а точка C – поза нею. Намалюйте площину, в якій лежать усі три точки.

120. На скільки частин розділяється простір двома площинами?

121. На скільки частин можуть розділити простір чотири площини?

122. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть з цупкого паперу чи картону модель площин, що перетинаються.

Вправи для повторення

123. На скільки частин розбивають площину три різні прямі?

124. Чи лежать точки M, N, K на одній прямій, якщо:
а) $MN = 5\frac{11}{15}$ м, $MK = 11{,}65$ м, $NK = 5\frac{11}{25}$ м;
б) $MN = 17$ см, $NK = 21{,}5$ см, $MK = 5{,}5$ см?

125. Об'єм куба дорівнює 8 см^3. Знайдіть площу його поверхні.

§4 АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ І НАСЛІДКИ З НИХ

У справедливості математичних тверджень переконуються за допомогою *доведень*. Довести дане твердження – означає показати, що воно випливає з інших тверджень, істинність яких уже встановлено. Твердження, які доводять, називають *теоремами*.

Не кожне геометричне твердження можна довести. Коли виклад геометрії тільки починається, неможливо вивести наслідки з інших тверджень, оскільки їх (інших тверджень) ще немає. Ось чому кілька перших тверджень приймають без доведення. Їх називають *аксіомами*.

За геометричні аксіоми зазвичай приймають твердження, які відповідають формам і відношенням, що спостерігаються в матеріальному світі. У справедливості цих тверджень люди переконалися в результаті багатовікової практичної діяльності.

На будь-якій площині, як вона не була б розташована у просторі, виконуються всі аксіоми планіметрії. Але для стереометрії одних цих аксіом недостатньо. Потрібні аксіоми, що виражають основні властивості точок, прямих і площин у просторі. Сформулюємо їх.

!

C_1. У просторі існує (принаймні одна) площина і точка, що не лежить у цій площині.

C_2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

C_3. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

C_4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

ЗАУВАЖЕННЯ. Ніяких інструментів, якими можна було б проводити у просторі площини, немає. Тому вираз «можна провести» в аксіомі C_2 вжито в розумінні «існує». В аксіомі C_4 слова «яка проходить через цю точку» не обов'язкові. Але сформульованою так аксіомою зручніше користуватися.

Розглянемо найважливіші наслідки з аксіом стереометрії.

У просторі є безліч точок. Адже простір містить площину (аксіома C_1), а з планіметрії відомо, що множина точок площини нескінченна.

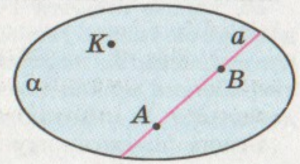
З аксіом C_1 і C_2 випливає, що в просторі є безліч площин. У кожній з них існують прямі, відрізки, кути, кола та інші плоскі фігури. Отже, всі вони є і в просторі.

Два наслідки з аксіом стереометрії сформулюємо у вигляді теорем.

!

Теорема 1. ***Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано пряму a і точку K, що не лежить на ній (мал. 50). Позначимо на прямій a дві довільні точки A і B. Точки A, B і K не лежать на одній прямій, тому через них можна провести площину α (аксіома C_2). Точки A і B прямої a лежать у площині α, отже, і вся пряма a лежить у цій площині (аксіома C_3). Як бачимо, через пряму a і точку K одну площину провести можна. А чи можна провести ще одну? Якби це було можливо, то через точки A, B і K проходили б дві площини. Останнє суперечить аксіомі C_2. Отже, через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести тільки одну площину.

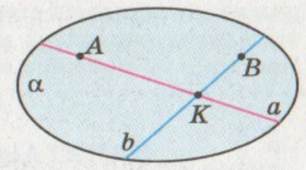


Мал. 50

!

Теорема 2. ***Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано прямі a і b, що перетинаються в точці K (мал. 51). Позначимо на них точки A і B, відмінні від K. Через точки A, B і K можна провести площину α (аксіома C_2). Прямі a і b лежать у площині α (аксіома C_3). Отже, через прямі a і b площину провести можна.



Мал. 51

Припустимо, що через дані прямі a і b можна провести ще площину β, відмінну від α. У такому разі через точки A, B і K, що не лежать на одній прямій, проходять дві різні площини. Це суперечить аксіомі C_2. Отже, через дві прямі, які перетинаються, можна провести тільки одну площину.

З аксіоми C_2 і доведених теорем випливає, що площину можна задати:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, що не лежить на ній;
3) двома прямими, які перетинаються.

Про задання площини двома паралельними прямими див. на с. 67.

Для допитливих

Ви вже знаєте, що в геометрії є геометричні поняття, відношення і твердження. Приклади геометричних понять: *точка, промінь, відрізок, площина, коло, куб, площа, об'єм* тощо. Приклади відношень: *належить, паралельно, перпендикулярно, лежить між* і т. ін. Зміст поняття або відношення розкривають за допомогою означення. Тому нерідко відношення вважають окремим видом понять.

Не кожне поняття і не кожне відношення можна означити за допомогою інших уже відомих понять, тому деякі з них приймають без означень. Їх називають *неозначуваними* поняттями. Не кожне твердження можна довести, тому деякі твердження приймають без доведення. Їх називають *аксіомами*.

Строгі наукові курси геометрії будують за такою схемою. Спочатку називають неозначувані поняття і формулюють аксіоми. Після того за допомогою означень поступово вводять інші поняття (і відношення) і доводять інші важливіші твердження. Такий виклад геометрії називають *аксіоматичним*. (Детальніше див. про це на с. 215).

Системи неозначуваних понять і аксіом можуть бути різними. У нашому підручнику неозначуваними вважаються поняття: *точка, пряма, площина* і відношення: *належить, не належить, лежить між, перетинаються* та деякі інші.

Кожний строгий аксіоматичний курс геометрії досить громіздкий і важкий. Наш курс також побудовано на аксіоматичній основі, але – не строгій. У ньому доводяться не всі теореми, а тільки найважливіші. А ще, аби полегшити сприймання, у ньому розглядаються деякі стереометричні поняття, відомі вам з попередніх класів, наприклад *куб, куля, грань, множина, простір* тощо. Простір – це множина всіх точок (універсальна множина).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Наведіть приклади геометричних понять.
2. Наведіть приклад геометричного твердження.
3. Що таке аксіома?
4. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
5. Сформулюйте і доведіть наслідки з аксіом стереометрії.
6. Як можна задати площину в просторі?

Виконаємо разом

1. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що ніякі три з них не лежать на одній прямій.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Припустимо, що які-небудь три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій. Через цю пряму і точку D можна провести площину α (теорема 1). Усі чотири дані точки лежать у площині α. А це суперечить умові задачі. Отже, ніякі три з даних точок не можуть лежати на одній прямій.

2. Доведіть, що через будь-які дві точки простору можна провести пряму і до того ж тільки одну.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай A і B – довільні точки простору. Через них і яку-небудь третю точку проведемо площину α. У цій площині через точки A і B можна провести єдину пряму a.

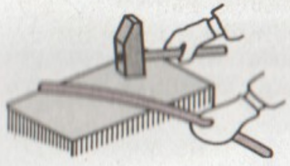
Припустимо, що через точки A і B у просторі проходить ще пряма a_1, відмінна від a. Її точки A і B лежать у площині α, тому і пряма a_1 лежить в α (аксіома C_3). Виходить, що через точки A і B у площині α проходять дві різні прямі a і a_1. Це суперечить планіметричній аксіомі 2 (див. с. 6). Отже, через точки A і B у просторі можна провести тільки одну пряму.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

126. Скільки спільних точок можуть мати дві площини?
127. Два кінці відрізка належать площині. Чи належать цій площині інші точки відрізка?
128. Дві різні точки відрізка не належать площині. Чи може яка-небудь точка відрізка лежати на цій площині?
129. Один кінець відрізка належить площині, інший не належить. Скільки спільних точок мають відрізок і площина?
130. Чи можна провести площину через три (чотири) точки, які лежать на одній прямій?
131. Через три точки проведено дві різні площини. Як розміщені ці точки?
132. Чи можуть належати даній площині: а) тільки дві вершини ромба; б) тільки три вершини ромба?
133. Задача-жарт. Три ластівки розлетілися в різні боки. За яких умов вони будуть в одній площині?
134. Вугільний пласт зазвичай залягає так, що його верхня межа (у грубому наближенні) є частиною площини. Яку найменшу кількість свердловин слід пробурити, щоб визначити, як розміщено пласт?
135. Щоб перевірити, чи добре оброблено плоску поверхню, у різних її місцях прикладають вивірену лінійку і

дивляться, чи немає зазору між ними. У якому випадку кажуть, що поверхня «неплоска»? Чому?



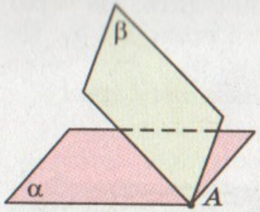
Мал. 52

136. Якщо не всі точки дроту дотикаються до плоскої поверхні ковадла, дріт «непрямий». Чому? Щоб вирівняти його, б'ють молотком по його опуклостях, як показано на малюнку 52. Після кількох ударів дріт перевертають. Навіщо?

А

137. Доведіть, що в просторі існує безліч площин.

138. Площини α і β мають спільну точку A (мал. 53). Чи мають ці площини спільні точки, відмінні від A? Скільки їх? Зобразіть їх на малюнку.



Мал. 53

139. У площині α лежать точки A і B, у площині β – точки B і C, у площині γ – точки A, B і C. Зробіть відповідний малюнок.

140. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести площину. Скільки площин можна провести через дану точку?

141. Прямі a і b не мають спільних точок. Чи випливає з цього, що через них не можна провести площину?

142. Скільки площин можна провести через дві дані точки? Зобразіть відповідний малюнок.

143. Чотири точки не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через трійку цих точок?

144. Точка A належить площині α, а B не належить. Чи належить площині α середина відрізка AB?

145. Дано пряму a і точку B, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку B і перетинають a, лежать в одній площині.

146. Дві вершини і точка перетину діагоналей трапеції належать площині α. Як розміщені дві інші вершини трапеції відносно α?

147. Вершини A і B ромба $ABCD$ і точка перетину його діагоналей лежать у площині α. Доведіть, що $C \in \alpha$, $D \in \alpha$.

148. Вершина A і медіана BM трикутника ABC належать площині α. Чи належить цій площині висота CN?

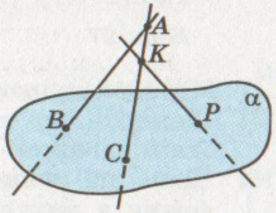
149. Три вершини трикутника лежать у площині α. Доведіть, що кожна точка цього трикутника лежить у площині α.

150. Три різні точки трикутника ABC лежать у площині α. Чи випливає з цього, що кожна точка трикутника ABC лежить у площині α?

151. Прямі MA і MB перетинаються в точці M. Доведіть, що всі прямі, які їх перетинають, але не проходять через точку M, лежать в одній площині. Чи можна через точку M провести пряму, яка не лежить у цій площині?

Б

152. Прямі AB, AK і KP перетинають площину α в точках B, C і P, як показано на малюнку 54. Чи перетинаються прямі AB і KP?



Мал. 54

153. Доведіть, що існує: а) пряма, яка перетинає дану площину; б) площина, що перетинає дану площину.

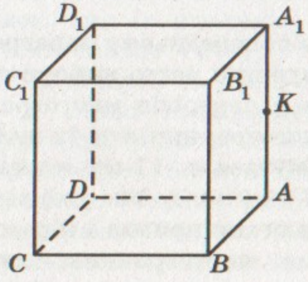
154. На малюнку 55 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – середина ребра AA_1. Площини яких граней куба перетинає пряма BK? А пряма CK?

155. Прямі a, b, c лежать у площині α. На них взято точки $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, які належать площині β. Доведіть, що точки A, B, C лежать на одній прямій.

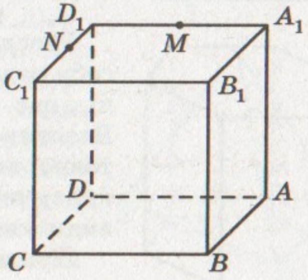
156. Площини α і β перетинаються по прямій a. У площині β взято пряму b, яка перетинає площину α в точці K. Доведіть, що $K \in a$.

157. Використовуючи малюнок 55, побудуйте точку перетину: а) прямої D_1K з площиною (ABC); б) прямої BK з площиною $(A_1B_1C_1)$.

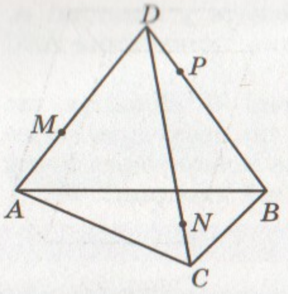
158. Накресліть малюнок 56 у зошит і побудуйте: а) точку перетину прямих MN і A_1B_1; б) точку перетину прямої MN з (B_1BC); в) лінію перетину площин (MNB) і (BB_1D_1); г) лінію перетину площин (MND) і (AA_1D).



Мал. 55



Мал. 56



Мал. 57

159. Точки A, B, C, D, які не лежать на одній площині, попарно сполучені відрізками. $M \in AD$, $N \in CD$, $P \in BD$ (мал. 57). Накресліть малюнок 57 у зошиті й побудуйте: а) точку перетину прямих MN і AC; б) точку перетину прямої MP з (ABC); в) точку перетину прямої NP з (ABC); г) лінію перетину площин (MNP) і (ADB).

160. Уявіть, що на малюнку 57 точка N може змінювати положення на прямій CD. Визначте точку перетину прямої MN з площиною (ABC). Чи завжди така точка існує?

161*. Доведіть, що в просторі існують прямі, які не лежать в одній площині.

162*. Дано дві прямі, які не лежать в одній площині. Через кожну з них проведено площину, що перетинає другу пряму. Доведіть, що пряма перетину цих площин перетинає кожну з даних прямих.

163*. Дано n прямих. Доведіть, що в просторі є точки, які не лежать на жодній із цих прямих.

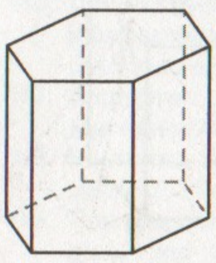
Вправи для повторення

164. Зобразіть: $\alpha \cap \beta = l$, $a \subset \alpha$, $M \in \alpha$, $K \in \alpha$, $K \in \beta$.

165. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $F \in CC_1$. Яким площинам належить точка F?

166. Діагональ грані куба дорівнює d. Знайдіть його об'єм.

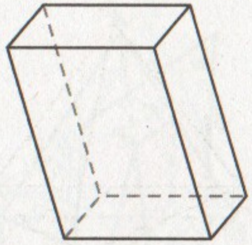
§5 МНОГОГРАННИКИ ТА ЇХ ПЕРЕРІЗИ



Мал. 58

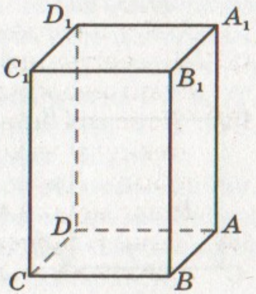
Розглянуті в попередньому параграфі способи задання площин часто використовують під час побудови перерізів многогранників. Властивості многогранників та їх види ґрунтовно вивчатимуться в 11-му класі, але з курсу геометрії 9-го класу вам уже відомі два види многогранників: призма і піраміда.

Призма – це многогранник, дві грані якого – рівні n-кутники з відповідно паралельними сторонами, а всі інші n граней – паралелограми. Два n-кутники – *основи призми*, решта граней – *бічні грані*. На малюнку 58 зображено шестикутну призму. Ребра призми, які не є сторонами її основ, називають *бічними ребрами*. Усі бічні ребра призми попарно паралельні й рівні.



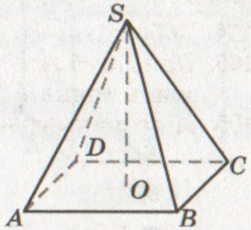
Мал. 59

Окремі види призми – *паралелепіпед* і *куб*. У паралелепіпеда всі грані паралелограми (мал. 59), а в куба – рівні квадрати. Якщо всі грані паралелепіпеда – прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом* (мал. 60). Він має 6 граней, 12 ребер, 8 вершин. Записуючи «паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$», мають на увазі, що його основи $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, а бічні ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.



Мал. 60

Піраміда – многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а всі інші грані – трикутники, що мають спільну вершину. Якщо основою піраміди є трикутник, чотирикутник, ..., то її називають відповідно трикутною, чотирикутною, ... пірамідою. На малюнку 61 зображено чотирикутну піраміду $SABCD$. Трикутну піраміду називають також тетраедром.

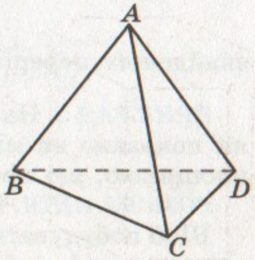


Мал. 61

Тетраедр – чотиригранник (грец. *тетра* – чотири). Він має 4 грані, 6 ребер, 4 вершини (мал. 62).

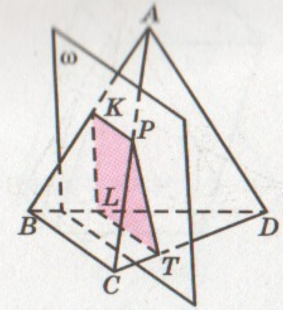
Усі грані тетраедра – трикутники. Якщо всі вони – правильні трикутники, його називають *правильним тетраедром*.

Що таке переріз многогранника? Якщо жодна з двох точок не належить площині, а відрізок, що їх сполучає, має з цією площиною спільну точку, то кажуть, що дані точки лежать по різні боки від площини. А якщо принаймні дві точки многогранника лежать по різні боки від площини, кажуть, що площина перетинає многогранник. У цьому разі її називають *січною площиною*. Фігура, яка складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, називається *перерізом многогранника* даною площиною. На



Мал. 62

4*



Мал. 63

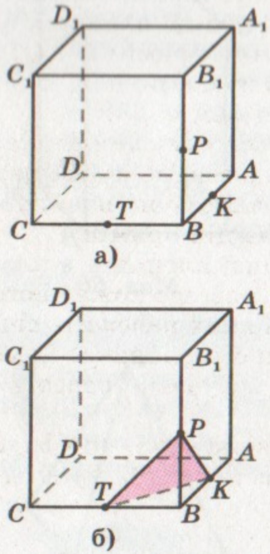
малюнку 63 зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω. Точки A і B лежать по різні боки від січної площини. Плоский чотирикутник $KPTL$ – переріз даного тетраедра площиною ω.

Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: вказати три (що не лежать на одній прямій) точки, через які проходить ця площина, або точку і пряму тощо.

ПРИКЛАД 1. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T – середини ребер AB, BB_1 і BC (мал. 64, *а*).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Точки K, P, T не лежать на одній прямій, тому задають деяку площину. Треба на зображенні куба побудувати зображення шуканого перерізу.

Точки K і P лежать у площині грані ABB_1A_1 куба і в січній площині. Отже, ці площини перетинаються по прямій KP. Січна площина перетинає квадрат ABB_1A_1 по відрізку KP. Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP. Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT. Це і є шуканий переріз (мал. 64, *б*).



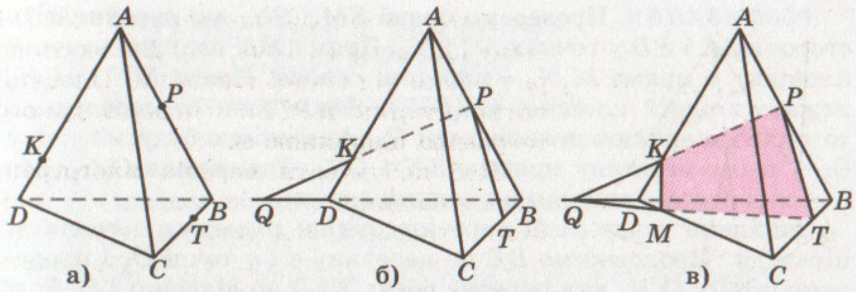
Мал. 64

Іноді в задачах потрібно не тільки побудувати переріз, а й знайти його площу або периметр. Для цього треба знати розміри даної фігури. Наприклад, якщо довжина ребра розглядуваного куба a, то $BK = BP = BT = \frac{a}{2}$, $KP = PT = TK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Отже, площа знайденого перерізу $S = \frac{KP^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$.

ПРИКЛАД 2. На ребрах тетраедра $ABCD$ дано точки K, P, T, як показано на малюнку 65, *а*. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через дані точки.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проводимо відрізки KP і PT.

Щоб побудувати інші сторони шуканого перерізу, знайдемо точку, в якій січна площина KPT перетинає ребро CD. Прямі KP і BD лежать у площині (ABD) і не паралельні, отже



Мал. 65

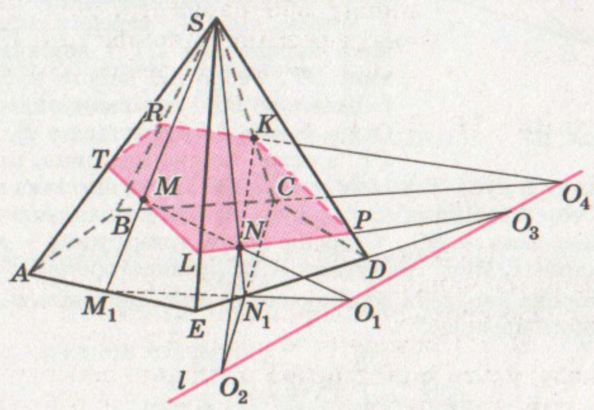
перетинаються у деякій точці Q (мал. 65, *б*). Точка Q належить площинам (KPT) і (BCD). І точка T належить цим площинам. Тому кожна точка прямої QT належить січній площині, у тому числі й точка M, в якій перетинаються прямі CD і QT. Визначивши точку M, сполучаємо її відрізками з K і T. Чотирикутник $KPTM$ – шуканий переріз (мал. 65, *в*).

Цей метод побудови перерізів називається *методом слідів*.

Слід січної площини в площині α – це пряма, по якій січна площина перетинає площину α. Точка, в якій січна площина перетинає пряму, – слід січної площини на цій прямій.

У даному випадку пряма QT – слід січної площини в площині основи BCD. З означення сліду випливає, що кожна його точка – це точка перетину прямих, одна з яких належить січній площині, а друга – площині грані многогранника. Саме цю властивість використовують для побудови перерізів многогранників методом слідів.

ПРИКЛАД 3. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки M, N, K, де $M \in (ASE)$, $N \in (SED)$, $K \in SC$ (мал. 66).



Мал. 66

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проведемо прямі SM і SN, які перетинають сторони AE і ED у точках M_1 і N_1. Пряма MN належить січній площині, а пряма M_1N_1 – площині основи. Прямі MN і M_1N_1 лежать в одній площині (M_1SN_1). Якщо вони не паралельні, то перетинаються в деякій точці O_1. Аналогічно будуємо точку O_2 – точку перетину прямих KN і CN_1. Тоді пряма O_1O_2, або l, – слід січної площини в площині основи.

Знайдемо тепер лінії перетину січної площини з гранями піраміди. Продовжимо DE до перетину з l у точці O_3 і проведемо пряму O_3N, яка перетне грань ESD по відрізку LP. Тоді LT і PK – лінії перетину січної площини з гранями ASE і CSD. Продовжимо BC до перетину з l і через утворену точку O_4 проведемо пряму O_4K, яка перетне грань BSC по відрізку KR. Сполучивши точки T і R, отримаємо шуканий переріз $TRKPL$.

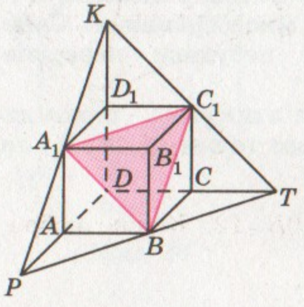
Якщо точки M, N і K розташовані так, що пряма MN чи KN не перетинають площину основи піраміди, розв'язання задачі треба змінити. Як це зробити, розглянемо далі.

Для допитливих

Іноді доводиться здійснювати перерізи многогранників площинами, заданими точками, які лежать не на ребрах многогранника, а поза ними.

ЗАДАЧА. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = a$) і точки K, P, T такі, що вершини куба D_1, A, C – середини відрізків DK, DP, DT. Побудуйте переріз куба площиною (KPT) і знайдіть площу перерізу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. На променях DD_1, DA, DC позначимо дані точки K, P, T і сполучимо їх відрізками (мал. 67).



Мал. 67

Уявімо, що AM – середня лінія $\triangle PDT$, вона паралельна DT і дорівнює половині DT. Ребро AB даного куба також паралельне DT і дорівнює половині DT. Отже, точка M збігається з B, відрізок PT, а отже, і січна площина, проходить через вершину B куба. Так само можна показати, що січна площина проходить через вершини A_1 і C_1 куба. Отже, розглядуваним перерізом є трикутник A_1BC_1. Сторони цього трикутника – діагоналі рівних квадратів, тому трикутник A_1BC_1 рівносторонній.

Якщо сторона квадрата дорівнює a, то його діагональ $a\sqrt{2}$. Тому шукана площа перерізу:

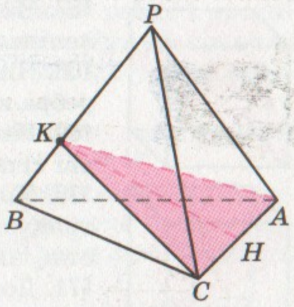
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Наведіть приклади многогранників.
2. Скільки граней, ребер і вершин має куб? А паралелепіпед?
3. Скільки граней, ребер і вершин має тетраедр?
4. Що таке січна площина?
5. Скількома точками можна задати січну площину?
6. Що називається перерізом многогранника?
7. Що таке слід січної площини?

Виконаємо разом

1. Дано правильний тетраедр $PABC$, а на його ребрі PB точку K таку, що $PK = 2KB = 8$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через ребро AC і точку K. Знайдіть площу перерізу.



Мал. 68

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Сполучимо точку K з точками A і C (мал. 68). Трикутник KAC – шуканий переріз. У $\triangle KAC$: $AK = KC$, оскільки трикутники APK і CPK рівні.

Якщо KH – висота $\triangle AKC$, то $AH = HC$. Знайдемо AC і KH.

Оскільки $PK = 2KB = 8$, то $KB = 4$, $PB = 12$. Кожне ребро тетраедра дорівнює 12, тому $CH = 6$.

У $\triangle CBK$: $BC = 12$, $BK = 4$, $\angle KBC = 60°$.

Тоді за теоремою косинусів знаходимо:

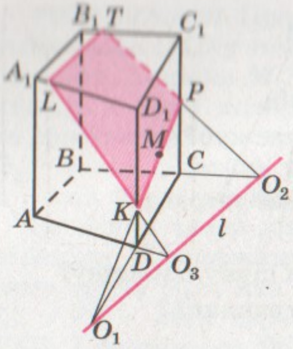
$$CK^2 = BC^2 + BK^2 - 2\cdot BC\cdot BK\cdot\cos 60° = 12^2 + 4^2 - 2\cdot 12\cdot 4\cdot 0{,}5 = 112.$$

За теоремою Піфагора з $\triangle CHK$ знаходимо KH:

$$KN = \sqrt{CK^2 - CH^2} = \sqrt{112 - 36} = 2\sqrt{19}.$$

Отже, шукана площа:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2\sqrt{19} = 12\sqrt{19}.$$



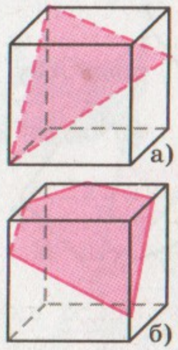
Мал. 69

2. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, заданою слідом l в площині основи і точкою M грані CC_1D_1D (мал. 69).

Розв'язання. Нехай CD перетинає l в точці O_1. Тоді пряма O_1M перетинає грань CC_1D_1D по відрізку KP. Якщо O_2 – точка перетину BC і l, то PT – лінія перетину січної площини з площиною BB_1C_1C. Аналогічно будуємо відрізок LK ($AD \cap l = O_3$, $O_3K \cap (AA_1D) = KL$). Сполучивши точки L і T, отримаємо шуканий переріз $LTPK$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно



Мал. 70

167. Чи може перерізом прямокутного паралелепіпеда бути прямокутник? А квадрат?

168. Чи може січна площина перетинати всі ребра куба? А всі грані куба?

169. На скільки частин можуть розрізати куб дві січні площини? А три?

170. Чи може бути перерізом куба рівнобедрений трикутник, правильний трикутник, прямокутник, квадрат, трапеція?

171. Доведіть, що перерізом тетраедра не може бути п'ятикутник.

172. Учень намалював переріз куба площиною (мал. 70, *а–б*). Чи є помилка на малюнках?

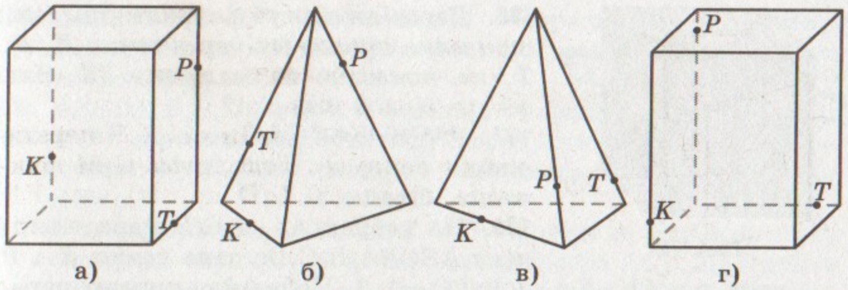
А

173. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: а) точки A, B_1 і D_1; б) точки A, C і середину ребра DD_1.

174. Точка K – середина ребра AD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B, C і K.

175. Точка M – середина ребра CD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму AB і точку M.

176. $ABCD$ – тетраедр. Точки K і M – середини ребер AD і CD. Побудуйте переріз тетраедра площиною (BKM).



Мал. 71

177. Накресліть малюнки 71, *а–г* у зошит і на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною, яка проходить через точки K, P, T.

178. Побудуйте точку перетину прямої з площиною основи чотирикутної піраміди, якщо ця пряма проходить через дві точки, які належать: а) бічним ребрам однієї грані; б) протилежним бічним ребрам; в) бічному ребру і протилежній бічній грані; г) двом суміжним бічним граням; ґ) двом протилежним бічним граням. За якої умови побудова неможлива?

179. Розв'яжіть попередню задачу у випадку шестикутної піраміди.

180. Дано правильний тетраедр, довжина ребра якого a. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

181. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його площу.

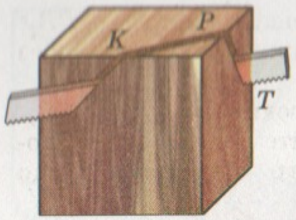
182. Знайдіть периметр і площу перерізу куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB=a$) площиною, яка проходить через точки A, C, B_1.

183. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N – середини ребер BC і DC, $AB=a$. Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка проходить через точки M, N і C_1.

184. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB=a$. Знайдіть периметр і площу перерізу куба площиною, яка проходить через точки M, A, D_1, якщо M – середина A_1B_1.

Б

185. Задайте на ребрах куба три точки так, щоб площина, яка проходить через них, перетинала даний куб по: а) трикутнику; б) чотирикутнику; в) п'ятикутнику.



Мал. 72

186. Дерев'яний куб розпилюють так, що пилка проходить через точки K, P, T, як показано на малюнку 72. Яка фігура буде в перерізі?

187. Ребро куба дорівнює a. Чи може площа перерізу цього куба мати значення, більше за $2a^2$?

188. На ребрах AA_1 і CC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано точки K і P такі, що $AK=KA_1$, $CP:PC_1=1:2$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною (D_1KP).

189. Спробуйте перерізати куб площиною так, щоб перерізом став правильний шестикутник. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

190. Побудуйте переріз чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка задана слідом у площині основи і точкою P, $P \in DD_1$, якщо: а) l не перетинає основу $ABCD$; б) l проходить через точки A і C; в) l перетинає сторони AB і BC.

191. Виконайте попередню задачу, якщо $SABCD$ – чотирикутна піраміда, $P \in SD$.

192. Побудуйте переріз піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки M, N, K, які належать: а) ребрам SA, SC, SE; б) $M \in SB$, $N \in SD$, $K \in (ASE)$; в) $M \in SA$, $N \in SC$, $K \in DE$.

193. Побудуйте переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через три точки, які лежать на трьох послідовних бічних ребрах.

194. Дано тетраедр $ABCD$, M – середина BC. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки A, D, M, і знайдіть його периметр та площу, якщо $DA=DB=DC=5$ см, $AB=BC=AC=6$ см.

195. $ABCD$ – правильний тетраедр, $AB=a$, $BM:MD=1:3$. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки A, C, M.

196. Дано правильний тетраедр $ABCD$, $AB=l$. AM і AK – медіани, $M \in BC$, $K \in BD$. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки A, M, K.

197. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AB=a$, M – середина AA_1, N – середина CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки M, N, B_1.

198. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M, N, K – середини відрізків B_1C_1, C_1D_1 і DD_1 відповідно. Побудуйте переріз куба площиною (MNK) та знайдіть периметр і площу утвореного перерізу, якщо $AA_1=a$.

199. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка B_1 – середина відрізка BB_2. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки A, B_2 і C.

200. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка B_1 – середина відрізка BB_2, а C – середина відрізка BC_2. Побудуйте переріз куба площиною (AB_2C_2). Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB=a$.

201*. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено відрізок, який сполучає вершину A із серединою ребра CC_1. Побудуйте точку перетину цього відрізка з площиною (BDA_1). У якому відношенні цей відрізок ділиться даною площиною?

202. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть з цупкого паперу моделі тетраедра і паралелепіпеда.

Позначте середини трьох ребер многогранника, проведіть через них переріз, накресливши на гранях відповідні відрізки, і обчисліть площі перерізів, виконавши потрібні вимірювання.

Вправи для повторення

203. Три вершини прямокутника належать площині α. Доведіть, що цій площині належить і точка перетину діагоналей прямокутника.

204. M – внутрішня точка грані BCD тетраедра $ABCD$. Побудуйте лінії перетину площини (ADM) з площинами (BCD) і (ABC).

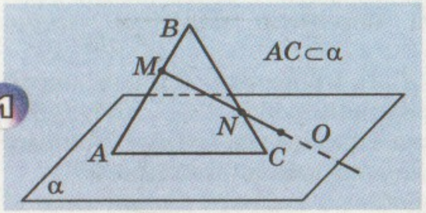
205. З точки M до прямої l проведено перпендикуляр $MO=12$ см і похилі MA, MB, різниця довжин яких дорівнює 7 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх проекції відносяться як $5:16$.

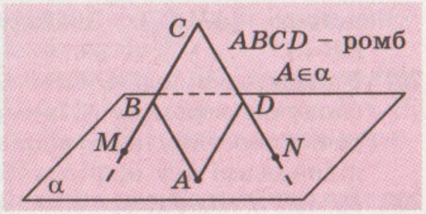
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А | **Б**

Укажіть помилку на малюнку.

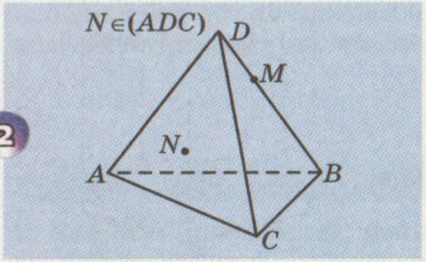
1

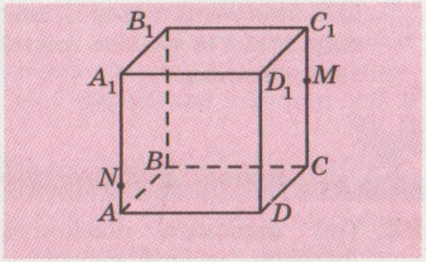




Знайдіть точку перетину прямої MN з (ABC).

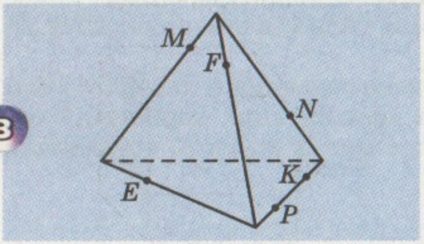
2

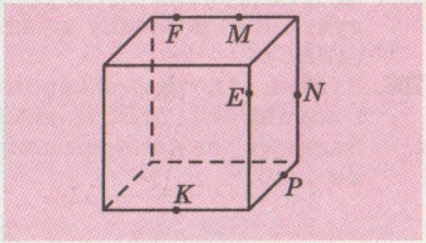




Побудуйте лінію перетину площин (MNP) і (EFK).

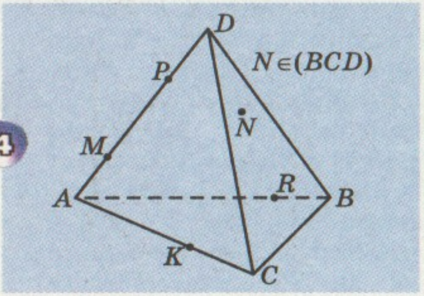
3

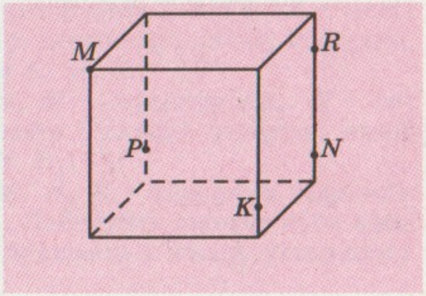




Знайдіть точку перетину прямої MN з (PRK).

4

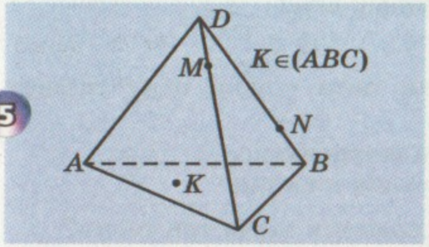


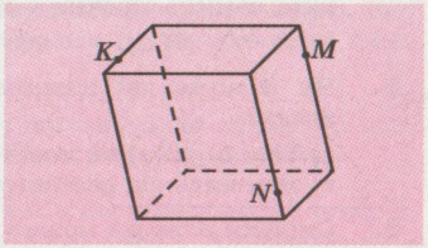


А | **Б**

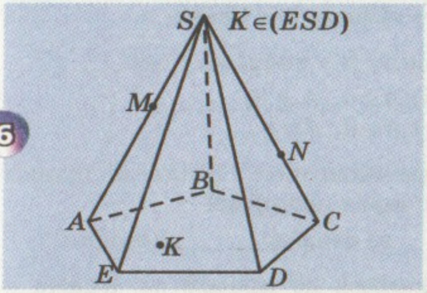
Побудуйте перерізи многогранників площиною, яка проходить через точки M, N, K.

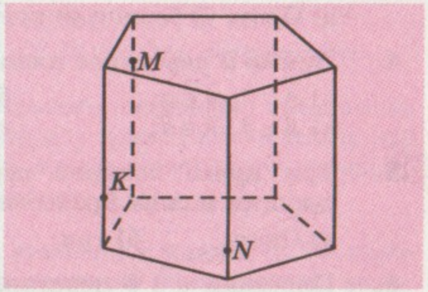
5





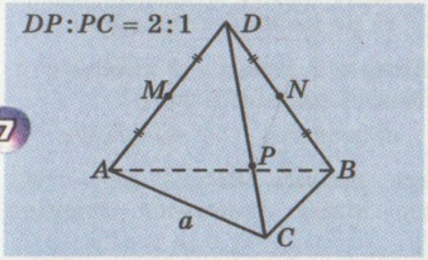
6

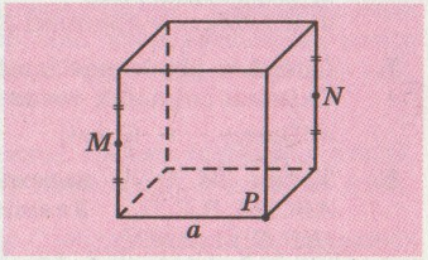




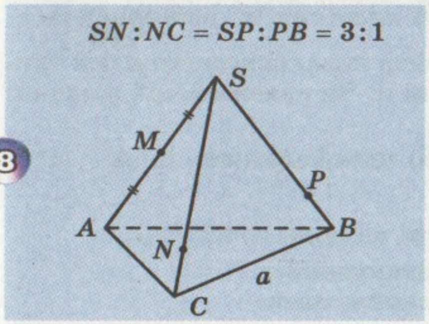
Побудуйте переріз правильного тетраедра і куба площиною (MNP). Знайдіть периметр і площу перерізу.

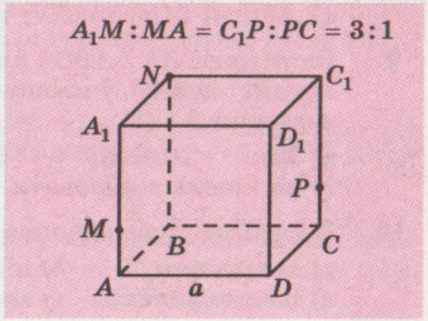
7





8





ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Пряма a лежить у площині α. Який знак слід поставити замість зірочки у запису $a*\alpha$?
а) $\in$; б) $\subset$; в) $\cap$; г) $\supset$.

2. Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?
а) Так; б) ні; в) не можна встановити;
г) залежить від розташування площин.

3. Скільки площин можна провести через три точки?
а) Одну; б) безліч; в) три; г) одну або безліч.

4. Пряма a перетинає площину β у точці A. Тоді:
а) $A\subset\beta$, $A\in a$; б) $A\in a$, $A\notin\beta$;
в) $A\in\beta$, $A\in a$; г) $A\in\beta$, $A\notin a$.

5. Три прямі попарно перетинаються. Скільки різних площин можна провести через ці прямі?
а) Одну; б) три; в) безліч; г) жодної.

6. Площини α і β перетинаються по прямій m. Пряма a лежить у площині α і перетинає пряму m. Яке взаємне розміщення прямої a і площини β?
а) Перетинаються; б) не мають спільних точок;
в) a лежить у площині β; г) не можна встановити.

7. Пряма a перетинає площину α і лежить у площині β. Скільки спільних точок мають площини α і β?
а) Одну; б) дві; в) жодної; г) безліч.

8. Точки M і N належать ребрам BB_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть лінію перетину площин (BB_1C_1) і (AMN).
а) AM; б) MN; в) DN; г) площини не перетинаються.

9. Бісектриса AL $\triangle ABC$ і центр кола, вписаного в цей трикутник, лежать у площині α. Чи належать цій площині вершини B і C?
а) Так; б) ні; в) одна належить, інша – ні;
г) не можна встановити.

10. Перерізом куба площиною не може бути:
а) трикутник; б) п'ятикутник;
в) шестикутник; г) восьмикутник.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Площина α, прямі a і b та точка A задовольняють такі умови: $a\subset\alpha$, $a\cap\beta=A$. Зобразіть на малюнку всі можливі варіанти.

2. Чи може середня лінія трикутника не лежати в площині цього трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

3. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Точка P не лежить у площині (ABC). Чи можна провести площину через: а) пряму PD та точки B і O; б) пряму AO та точки P і D? Відповідь обґрунтуйте.

4. Побудуйте переріз правильного тетраедра площиною, що проходить через бісектрису грані і протилежну цій грані вершину. Обчисліть площу утвореного перерізу, якщо ребро тетраедра дорівнює 6 см.

5. Дві вершини трикутника лежать у площині α. Чи належить цій площині третя вершина трикутника, якщо відомо, що площині α належить центр кола, описаного навколо трикутника.

6. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, M, якщо $K\in AA_1$, $L\in CD$, $M\in CC_1$, $AK:KA_1=1:3$, $DL:LC=1:1$, $CM:MC_1=3:4$.

7. Точки M і N лежать у бічних гранях тетраедра $ABCD$. Побудуйте точку перетину прямої MN з основою ABC.

8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин (A_1C_1D) і (AD_1C). Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що знаходиться всередині куба, якщо ребро куба дорівнює a.

9. Точка M лежить у грані APC тетраедра $PABC$. Побудуйте точку перетину прямої BM з площиною (APK), якщо $K\in CB$, $CK:KB=1:2$.

10. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди площиною, яка задана трьома точками, дві з яких належать бічним граням піраміди, а третя – її основі.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

1 Як відомо, при аксіоматичному викладі геометрії кілька перших понять і відношень приймаються без означень, а всі інші означаються. У цьому підручнику за неозначувані прийнято поняття *точка*, *пряма*, *площина*, *простір* і відношення *належати* (точка належить прямій чи площині), *лежати між* (точка A лежить між B і C) та ін.

2 Якщо точка A належить (чи не належить) фігурі F, то пишуть відповідно: $A \in F$ ($A \notin F$).
Якщо пряма a лежить (чи не лежить) у площині α, то пишуть відповідно $a \subset \alpha$ ($a \not\subset \alpha$).

3 Аксіомами тут вважаються всі 10 аксіом площини (див. с. 6) і 4 стереометричні аксіоми (див. с. 44). З такої системи аксіом випливають, зокрема, такі твердження.
У просторі:
– *пряма однозначно визначається двома точками*;
– *площина визначається:*
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій (аксіома C_2);
2) прямою і точкою, яка не належить їй (теорема 2);
3) двома прямими, які перетинаються;
4) двома паралельними прямими (означення паралельних прямих).

4 Для наочної ілюстрації розглядуваних геометричних понять і відношень найкраще підходять задачі про *перерізи многогранників* площинами. У цьому розділі даються перші уявлення про простіші многогранники: *призми* (куби, паралелепіпеди) і *піраміди* (зокрема, тетраедри). Задачі на побудови перерізів тут також розглядаються найпростіші, розв'язувати які можна на основі стереометричних аксіом. Зокрема таких.
• Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.
• Якщо дві точки прямої лежать у деякій площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

5 Методи складніших побудов перерізів (метод слідів і відповідності) розглянуто в наступних розділах.

Паралельність прямих і площин у просторі

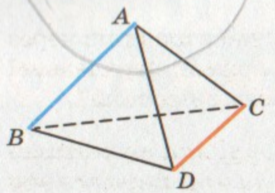
Основні теми розділу:
- Мимобіжні і паралельні прямі.
- Паралельність прямої і площини.
- Паралельність площин.
- Паралельне проектування і його властивості.
- Зображення фігур у стереометрії.
- Методи побудови перерізів многогранників.

РОЗДІЛ 3

Геометрія, учителька точності, готує наш розум до глибинних досліджень природи.

Т.Ф. Осиповський

§6 МИМОБІЖНІ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

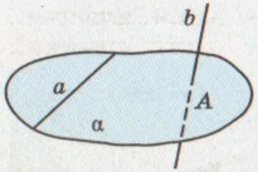


Мал. 73

Якщо дві прямі лежать в одній площині, вони або перетинаються, або паралельні. У стереометрії можливий і третій випадок. Наприклад, якщо $ABCD$ – тетраедр (мал. 73), то прямі AB і CD не перетинаються і не паралельні. Вони не лежать в одній площині.

Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають мимобіжними.

Теорема 3 (ознака мимобіжності прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину, але не перетинає першу пряму, то дані прямі мимобіжні.***



Мал. 74

ДОВЕДЕННЯ. Нехай пряма a лежить у площині α, а пряма b перетинає цю площину в точці A, такій, що $A \notin a$ (мал. 74).

Доведемо, що прямі a і b мимобіжні, тобто – не лежать в одній площині. Припустимо, що через прямі a і b можна провести деяку площину β. Вона не збігається з α, оскільки $b \not\subset \alpha$ і $b \subset \beta$. Площини α і β проходять через точку A. За аксіомою C_4 вони повинні перетинатися по прямій, що проходить через точку A. Але вони мають спільну пряму a, яка не проходить через точку A. Отже, зроблене припущення приводить до суперечності. Виходить, що прямі a і b не лежать в одній площині. Що і треба було довести.

Два відрізки називаються мимобіжними, якщо вони лежать на мимобіжних прямих.

Якщо прямі або відрізки a і b мимобіжні, іноді пишуть $a \dot{-} b$.

Дві прямі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

З означення випливає, що через дві паралельні прямі завжди можна провести площину, причому тільки одну. Адже якщо припустити, що через паралельні прямі a і b проведено дві різні площини, то з цього випливало б, що через пряму a і деяку точку прямої b проведено дві різні площини. Але цього не може бути (теорема 1).

Отже, до перелічених на с. 45 способів задання площини можна додати ще один: площину можна однозначно задати двома паралельними прямими.

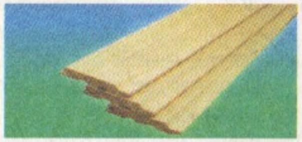
З аксіоми паралельності Евкліда випливає, що в площині через дану точку можна провести не більше однієї прямої, паралельної даній. А скільки таких прямих можна провести в просторі?

Теорема 4. ***Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Через них можна провести єдину площину (теорема 1). У цій площині можна провести пряму, паралельну прямій a, до того ж тільки одну (аксіома Евкліда). Отже, у просторі через дану точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій a.

ЗАУВАЖЕННЯ. Доведена теорема справедлива тільки в евклідовій геометрії. Про неевклідові геометрії дивіться на с. 219.

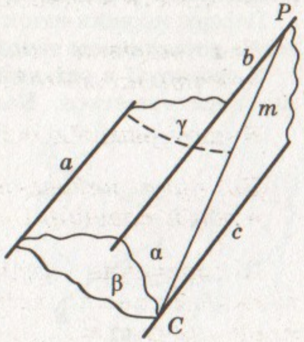
Дві паралельні прямі завжди лежать в одній площині. А три чи більше? Можуть і не лежати в одній площині. Наприклад, усі ребра прямозубої циліндричної шестірні лежать на паралельних прямих, але не належать одній площині. Те саме можна сказати і про поздовжні ребра шпунтових дощок (мал. 75), вертикальні колони будинку тощо.



Мал. 75

Теорема 5. ***Дві прямі, паралельні третій, паралельні.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel c$. Прямі a і c не можуть перетинатися. Інакше через точку їх перетину проходили б дві різні прямі, паралельні b, що суперечило б теоремі 4.



Мал. 76

Припустимо, що прямі a і c – мимобіжні (мал. 76). Через паралельні прямі a і b, b і c проведемо площини γ і α, а через пряму a і яку-небудь точку C прямої c – площину β. Нехай площини α і β перетинаються по прямій m. Прямі b, c і m лежать в одній площині α, причому $b \parallel c$. Тому пряма m, яка перетинає c, перетинає в деякій точці P і пряму b. Прямі m і b лежать відповідно у площинах β і γ. Тому їх спільна точка P належить цим площинам, а отже, і їх спільній прямій a. Як бачимо, з припущення випливає, що паралельні (за умовою) прямі a і b мають спільну точку P. Це – суперечність.

Отже, прямі a і c не можуть ні перетинатися, ні бути мимобіжними. Залишається єдино можливе: $a \parallel c$.

Доведену теорему називають теоремою *про транзитивність паралельності прямих* (від лат. *transitivus* – перехідний), оскільки в ній говориться про перехід властивості паралельності двох пар прямих на третю: з $a \parallel b$ і $b \parallel c$ випливає: $a \parallel c$.

Примітка. Щоб ця властивість була правильною завжди, навіть з $a \parallel b$ і $b \parallel a$ випливало, що $a \parallel a$, часто домовляються, що кожна пряма паралельна сама собі.

Паралельними бувають не тільки прямі, а й відрізки, промені. Два відрізки (промені) називають *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.

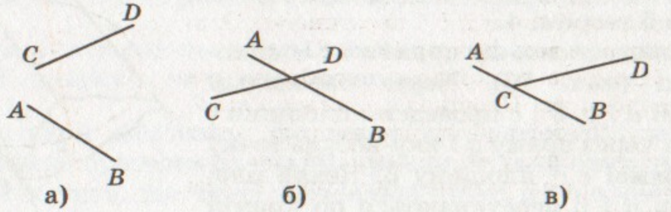
Для допитливих

Як можуть розташовуватися в просторі частини двох прямих: відрізки або промені? Оскільки мимобіжні прямі не лежать в одній площині, то й будь-які відрізки чи промені двох таких прямих не лежать в одній площині.

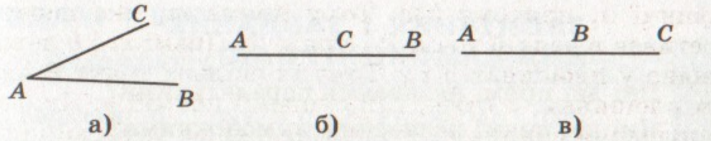
Якщо ж дві прямі простору перетинаються, то їх відрізки можуть не мати спільних точок (мал. 77, *а*) або мати одну спільну точку. Кажуть, що два відрізки перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку, яка є внутрішньою точкою для кожного з них (мал. 77, *б*). Відрізки AB і CD не перетинаються (мал. 77, *в*), хоч переріз їх як множин точок не порожній.

Коли прямі і відрізки розглядають як множини точок, то їх позначають різними символами: (AB) – пряма, $[AB]$ – відрізок. Переріз множин точок відрізків $[AB]$ і $[AC]$ не порожній: $[AB] \cap [AC]$ може дорівнювати точці A або відрізку AC чи AB (мал. 78).

У геометрії в останніх випадках відрізки не вважають такими, що перетинаються. Коли кажуть, що два відрізки чи промені



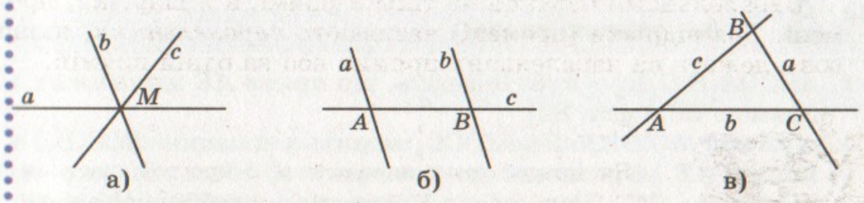
Мал. 77



Мал. 78

перетинаються, то розуміють, що вони мають тільки одну спільну точку, яка не є кінцем відрізка чи початком променя.

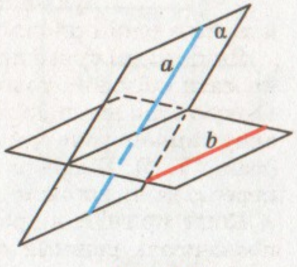
Три прямі у просторі можна розташувати багатьма різними способами. Усі вони можуть перетинатися в одній точці (мал. 79, *а*), одна з них може перетинати дві інші, які не мають спільних точок (мал. 79, *б*), вони можуть перетинатися попарно у трьох різних точках (мал. 79, *в*). У перших двох випадках усі три прямі можуть лежати або не лежати в одній площині; у третьому випадку всі три прямі належать одній площині. Чому?



Мал. 79

Якщо пряма c мимобіжна з прямими a і b, то дві останні прямі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними.

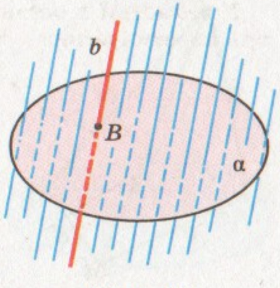
Нехай a і b – дві довільні мимобіжні прямі (мал. 80). Уявіть, що через кожну точку прямої a проведено пряму, паралельну прямій b. Усі вони заповнять деяку площину α. Кажуть, що геометричним місцем прямих, які паралельні одній з двох даних мимобіжних прямих і перетинають другу, є площина.



Мал. 80

Якщо пряма b перетинає площину α, то геометричним місцем прямих, які паралельні прямій b і перетинають площину α, є весь простір (мал. 81).

Площина α розбиває простір на два *півпростори*. Площина α – *межа* півпростору. Зверніть увагу на аналогію: точка розбиває пряму на дві півпрямі (два промені), пряма розбиває площину на дві півплощини.



Мал. 81

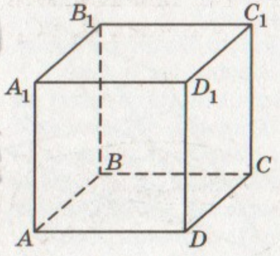
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які дві прямі називають паралельними?
2. Які дві прямі називають мимобіжними?
3. Наведіть приклади мимобіжних прямих, моделюючи їх: двома олівцями, речами, що є в класі.
4. Сформулюйте і доведіть ознаку мимобіжності прямих.
5. Скільки прямих можна провести через дану точку паралельно даній прямій?
6. Сформулюйте теорему про транзитивність паралельних прямих.
7. Які відрізки чи промені називаються паралельними?

Виконаємо разом

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що пряма AB мимобіжна з прямою CC_1 (мал. 82).

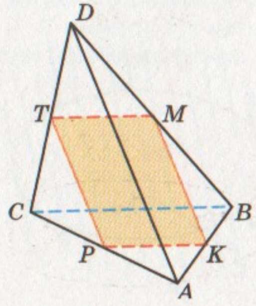
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Пряма CC_1 лежить у площині BCC_1B_1, а пряма AB перетинає цю площину в точці B, яка не лежить на CC_1. Тому згідно з ознакою мимобіжності прямі AB і CC_1 мимобіжні.



Мал. 82

2. K, P, T, M – середини ребер AB, AC, CD, DB тетраедра $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $KPTM$ – паралелограм.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Відрізки KP і MT – середні лінії трикутників ABC і DBC (мал. 83). Тому кожний з них паралельний ребру BC і дорівнює його половині. За властивістю транзитивності відрізки KP, MT паралельні й рівні. Отже, чотирикутник $KPTM$ – паралелограм.



Мал. 83

3. Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть бути паралельними прямі AC і BD? А перетинатися?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якби прямі AC і BD були паралельними або перетиналися, через них можна було б провести площину. У цій площині лежали б точки A, B, C і D, а отже, і прямі AB і CD. Але за умовою прямі AB і CD не лежать в одній площині. Отже, прямі AC і BD не можуть бути ні паралельними, ні перетинатися.

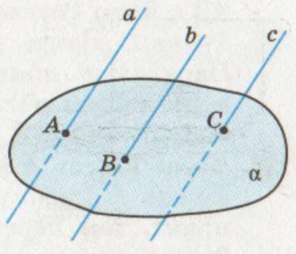
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

206. Чи паралельні відрізки a і c, якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$?
207. Відомо, що $a \subset \alpha$, $b \parallel a$. Чи може пряма b перетинати α?
208. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 82). Назвіть його ребра, які: а) паралельні AA_1; б) перпендикулярні до AA_1; в) мимобіжні з AA_1.
209. Назвіть три пари мимобіжних прямих, на яких лежать ребра тетраедра $ABCD$.
210. $ABCD$ – тетраедр (мал. 83). Чи паралельні його ребра AB і CD? Чи перетинаються прямі AC і BD?
211. Прямі AB і CD паралельні. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і BD? А перетинатися?
212. Чи можна вважати правильним таке означення: «Дві прямі називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні»?

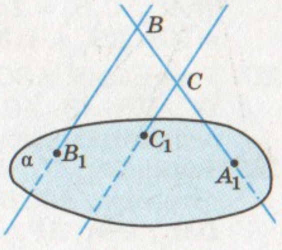
А

213. Попарно паралельні прямі a, b і c перетинають площину α у точках A, B і C, як показано на малюнку 84. Чи належать дані прямі одній площині?
214. Прямі BB_1 і CC_1, зображені на малюнку 85, перетинають пряму A_1B у точках B і C, а площину α – у точках B_1 і C_1. Чи паралельні прямі BB_1 і CC_1?
215. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 – теж паралелограм.
216. Точка M не лежить у площині $\triangle ABC$. Яке взаємне розміщення прямих MA і BC? А прямих EF і PK, якщо точки E і P лежать на прямій MA, а точки F і K – на прямій BC?

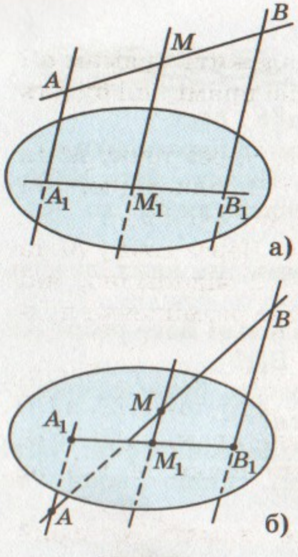


Мал. 84

217. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму a, яка не лежить у площині паралелограма, а через точку C – пряму b, яка паралельна BD. Доведіть, що a і b – мимобіжні.
218. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Доведіть, що площина (ACC_1) проходить через точку A_1.



Мал. 85



Мал. 86

219. Прямі a і b паралельні, а b і c не паралельні. Доведіть, що прямі a і c не паралельні.

220. Доведіть, що паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

221. Відрізки OA і OB перетинають площину α в точках A_1 і B_1, які є серединами цих відрізків. Знайдіть відстань AB, якщо $A_1B_1 = 3{,}8$ см.

222. Вершинами трикутника ABC є середини відрізків OA_1, OB_1, OC_1. Точка O не лежить у площині трикутника ABC. У скільки разів периметр трикутника $A_1B_1C_1$ більший від периметра трикутника ABC?

223. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину в точках A_1, B_1, M_1 (мал. 86). Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо $AA_1 = 6{,}5$ м, $BB_1 = 8{,}5$ м.

224. З точок A і B площини α проведено поза нею паралельні відрізки $AK = 16$ см і $BM = 12$ см. Пряма KM перетинає площину α в точці C. Знайдіть відстань AC, якщо $AB = 9$ см. Розгляньте два випадки.

225. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC:CB = 2:3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають деяку площину в точках A_1, C_1, B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

226. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо:

а) $AC:CB = 3:2$ і $BB_1 = 16$ дм;

б) $AC_1:C_1B_1 = 2:1$ і $BB_1 = 12$ дм;

в) $AB:BB_1 = 4:3$ і $AC = m$.

227. У тетраедрі $ABCD$ точки M, N, P, K – середини відрізків DC, DB, AB, AC. Знайдіть AD і BC, якщо $AD:BC = 3:2$, а периметр чотирикутника $MNPK$ дорівнює 10 см.

228. Точки M_1, N_1, P_1, K_1 – середини ребер DB, DC, AB і AC тетраедра $ABCD$. Точки M, N, P, K – середини відрізків DM_1, DN_1, AP_1, AK_1. Знайдіть периметри чотирикутників $MNPK$ і $M_1N_1P_1K_1$, якщо $BC = 20$ см, а $AD = 16$ см.

Б

229. Прямі a і b мимобіжні. Точка M не належить прямим a і b. Чи можна через точку M провести дві прямі, які будуть перетинати прямі a і b?

230. Прямі a і b паралельні. $M \notin a$, $M \notin b$. Через точку M та прямі a і b проведено площини α і β відповідно, які перетинаються по прямій c. Доведіть, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$.

231. Прямі a і b мимобіжні. $M \notin a$, $M \notin b$. Через точку M та прямі a і b проведено площини α і β відповідно, які перетинаються по прямій c. Яке взаємне розміщення прямих a і c, b і c? Відповідь обґрунтуйте.

232. Площини α і β перетинаються по прямій c. $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta$. Прямі AB і c перетинаються у точці M, а CD і c – у точці N. Яке взаємне розміщення прямих AB і CD, якщо: а) точки M і N збігаються; б) точки M і N не збігаються?

233. Дано точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які сполучають середини відрізків AB і DC, AD і BC, перетинаються в одній точці.

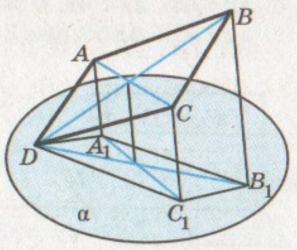
234. Дано точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які сполучають середини відрізків AB і CD, AC і BD, AD і BC, перетинаються в одній точці.

235. Через вершину D паралелограма $ABCD$ проведено площину, а через точки A, B, C – паралельні прямі, які перетинають цю площину в точках A_1, B_1, C_1 (мал. 87). Знайдіть BB_1, якщо $AA_1 = 15$ см, $CC_1 = 17$ см.

236. Нехай O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, а α – площина, яка не перетинає паралелограм. Через точки A, B, C, D, O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1. Доведіть, що: а) $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4 \cdot OO_1$; б) $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

237. Яку фігуру утворюють усі відрізки, що сполучають будь-які точки двох мимобіжних відрізків?

238*. Дано два мимобіжних відрізки. Знайдіть геометричне місце середин відрізків, що сполучають будь-яку точку одного з них з будь-якою точкою другого.



Мал. 87

239*. Доведіть, що в просторі існує принаймні три попарно мимобіжні прямі.

240*. Як побудувати пряму, що перетинає три дані попарно мимобіжні прямі?

Вправи для повторення

241. Побудуйте переріз правильного тетраедра $PABC$ площиною, яка проходить через точки P, M, N, де M і N – середини ребер AC і BC. Знайдіть косинус кута MPN.

242. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M – середина AA_1. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки B, D, M. Знайдіть діагональ куба, якщо площа перерізу дорівнює $64\sqrt{6}$ см^2.

243. Різниця катетів прямокутного трикутника 7 см, а медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 6,5 см. Знайдіть площу трикутника.

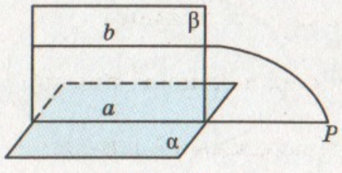
§7 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Як можуть розташовуватися в просторі пряма і площина? Вони можуть: 1) перетинатися, тобто мати тільки одну спільну точку; 2) не мати жодної спільної точки; 3) кожна точка прямої може лежати в площині. У другому випадку кажуть про паралельність прямої і площини.

Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо пряма a паралельна площині α, пишуть: $a \parallel \alpha$.

! **Теорема 6** (ознака паралельності прямої і площини). ***Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині.***



Мал. 88

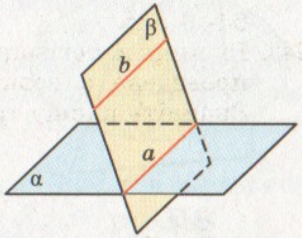
ДОВЕДЕННЯ. Нехай пряма b не лежить у площині α, пряма a лежить в α і $b \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel \alpha$.

Припустимо, що пряма b не паралельна площині α, а перетинає її у деякій точці P (мал. 88). Ця точка лежить у площині α і в площині β, яка проходить через паралельні прямі a і b. Отже, точка P лежить на прямій a, по якій перетинаються площини α і β. Прийшли до суперечності: прямі a і b паралельні й одночасно мають спільну точку P.

Отже, пряма b не може перетинати площину α.

! **Теорема 7.** ***Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = a$ (мал. 89). Доведемо, що $a \parallel b$. Якби прямі a і b перетиналися, їх точка перетину була б спільною для прямої b і площини α. Це неможливо, оскільки $b \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються, а лежать в одній площині β. Тому $a \parallel b$.



Мал. 89

Відрізок або промінь називається *паралельним* площині, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.

Кожне ребро паралелепіпеда паралельне площинам двох його граней. І пряма, проведена в грані бруска за допомогою рейсмуса (мал. 90), – площинам трьох граней. Муляри кладуть стіну під висок, шнур якого паралельний площині стіни. Горизонтальні планки мотовила зернозбирального комбайна хоч і змінюють своє положення під час роботи, залишаються паралельними площині поля. Усе це – матеріальні моделі паралельності прямої і площини.


Мал. 90

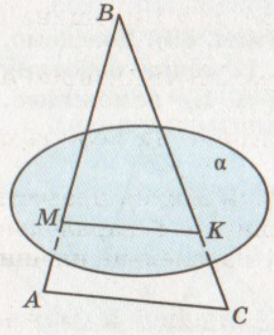
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як можуть бути розташовані в просторі пряма і площина?
2. Сформулюйте означення паралельності прямої і площини.
3. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
4. Чи може відрізок або промінь бути паралельний площині?
5. Який відрізок називають паралельним площині?

Виконаємо разом

1. Площина перетинає сторони $\triangle ABC$ у точках M і K ($M \in AB$ і $K \in BC$) так, що $AC \parallel \alpha$, $AM:MB = 2:5$ (мал. 91). Знайдіть AC, якщо $MK = a$.

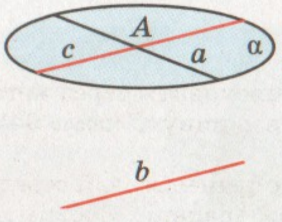
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Оскільки $AC \parallel \alpha$ і $AC \subset (ABC)$, то площина $\triangle ABC$ перетинає площину α по прямій, яка паралельна AC (теорема 7), тобто $MK \parallel AC$. Тоді $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. Маємо: $\frac{MK}{AC} = \frac{MB}{AB}$, звідси $\frac{MK}{AC} = \frac{5}{7}$, а $AC = 1{,}4 \cdot MK = 1{,}4a$.



Мал. 91

2. Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих a і b можна провести площину α, паралельну іншій прямій.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. На малюнку 92 зображено мимобіжні прямі a і b. Візьмемо на прямій a точку A і проведемо через неї пряму c, паралельну прямій b. Через прямі a і c, що перетинаються, проведемо площину α. Це і є шукана площина.

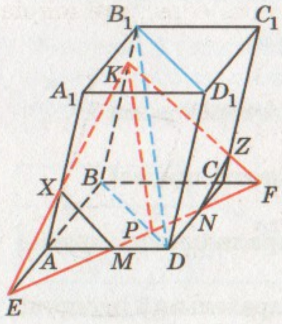


Мал. 92

3. Через середини M і N ребер AD і CD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно B_1D. Побудуйте переріз паралелепіпеда цією площиною та встановіть, у якому відношенні вона ділить ребро BB_1.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай у паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N – середини ребер AD і CD (мал. 93). Побудуємо площину BB_1D_1D, яка перетинає відрізок MN у точці P. Через точку P у площині BB_1D_1D проведемо $PK \parallel B_1D$.

Знайдемо точку E – точку перетину прямих AB і MN – та проведемо відрізок EK, який перетинає ребро AA_1 у точці X. Аналогічно будуємо відрізок KZ. Провівши відрізки XM і ZN, отримаємо шуканий переріз $MXKZN$.



Мал. 93

Оскільки $ABCD$ – паралелограм, то $BP:PD = 3:1$. Тоді з подібності трикутників B_1BD і KBP випливає, що $BK:KB_1 = 3:1$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

244. Знайдіть серед навколишніх предметів моделі прямих і площин, які паралельні між собою.

245. Спростуйте твердження: «Якщо прямі a, b і площина α такі, що $a \parallel \alpha$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$».

246. Пряма a паралельна прямій b, а b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що $a \parallel \alpha$?

247. Кожна з площин α і β паралельна прямій a. Чи можуть ці площини перетинатися?

248. Пряма a перетинає площину α. Скільки можна провести прямих, що: а) перетинають площину α і паралельні прямій a; б) перетинають пряму a і паралельні площині α?

249. Скільки прямих, паралельних даній площині α, можна провести через дану точку A, якщо $A \notin \alpha$?

250. Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через дану точку?

А

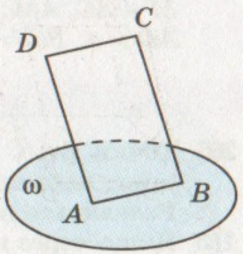
251. $ABCD$ – паралелограм. Площина ω проходить через його вершини A, B і не проходить через вершину C (мал. 94). Доведіть, що $CD \parallel \omega$.

252. Доведіть, що коли площина перетинає трапецію по її середній лінії, то вона паралельна основам трапеції. Зобразіть відповідний малюнок.

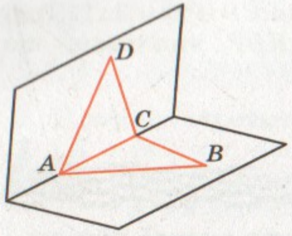
253. Точки A і B лежать у площині α, а O – поза площиною. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків OA і OB, паралельна площині α.

254. Площина α перетинає відрізки AB і AC в їхніх серединах – точках K і P. Доведіть, що відрізок BC паралельний площині α. Як відносяться: а) периметри трикутників ABC і AKP; б) площі трикутників ABC і AKP; в) площі многокутників AKP і $BKPC$?

255. Площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$. Доведіть, що $a \parallel c$.



Мал. 94



Мал. 95

256. У трикутнику ABC через точку M – середину сторони AB – проведено площину α, $\alpha \parallel BC$, $\alpha \cap AC = N$. Знайдіть: а) BC, якщо $MN = a$; б) $S_{BMNC} : S_{MAN}$.

257. Площина α перетинає середини катетів AB і AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC у точках M і N. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$ і знайдіть відношення $P_{BMNC} : P_{MAN}$.

258. Через точку M – середину гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC – проведено площину α, паралельну катету BC, яка перетинає катет AC у точці N. Знайдіть CM, якщо $BC : AC = 6 : 8$, $S_{\triangle AMN} = 24$ см^2.

259. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$ (мал. 95). Доведіть, що середини всіх її ланок лежать в одній площині.

260. $PABC$ – тетраедр, кожне ребро якого 6 см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через середину ребра PB паралельно ребрам PA, PC. Знайдіть периметр цього перерізу.

261. Побудуйте переріз тетраедра $PABC$ площиною, паралельною ребру AB, яка проходить через вершину P і середину ребра BC. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = BC = CA = a$, $PA = PB = PC = b$.

262. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, AD і паралельна прямій CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = l$.

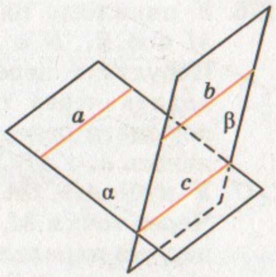
263. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через середину ребра CB паралельно прямим AC і DB. Визначте вид утвореного перерізу.

264. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка паралельна прямим AD і BC та проходить через точку M, $M \in AC$, $AM : MC = 2 : 1$. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AD = a$, $BC = b$.

Б

265. Точки B і C не лежать на прямій a. Скільки існує площин, паралельних a, які проходять через точки B і C? Розгляньте всі можливі випадки.

266. Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються, то лінія їх перетину паралельна кожній з даних прямих (мал. 96). Доведіть.



Мал. 96

267. Доведіть, що коли кожна площина, яка перетинає одну з двох даних прямих, перетинає і другу, то ці прямі паралельні.

268. Доведіть, що всі прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій, лежать в одній площині.

269. Через точку M – середину гіпотенузи AB трикутника ABC – проведено площину α, яка паралельна катету AC і перетинає катет BC у точці N. $BN - NM = a/2$, $CM = a$. Знайдіть $S_{\triangle ABC}$.

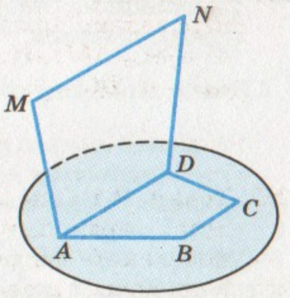
270. На бічній стороні AB трапеції $ABCD$ взято точки M_1, M_2, M_3 так, що $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B$ і через точки M_1, M_2, M_3 проведено площини, які паралельні AD. Ці площини перетинають сторону CD у точках N_1, N_2, N_3. Знайдіть: а) $S_{M_1M_3N_3N_1} : S_{ABCD}$; б) $S_{AM_1N_1D} : S_{M_3BCN_3}$, якщо $AD = a$, $BC = b$.

271. Трапеції $ABCD$ і $AMND$ лежать у різних площинах. Побудуйте точку перетину площини BCP і прямої ND, якщо P – довільна точка прямої AM (мал. 97).

272. У тетраедрі $ABCD$ точка M – середина AD, $N \in DB$, $DN : NB = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки M і N паралельно BC. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо всі ребра тетраедра дорівнюють a.

273. Дано тетраедр $ABCD$, у якого $\angle ADC = 90°$, $M \in AD$, $AM : MD = 1 : 3$, $N \in DC$, $DN : NC = 1 : 3$. Знайдіть площу перерізу, який проходить через точки M і N, паралельно BC, якщо $DA = DB = DC = b$, $AB = BC = AC$.

274. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через точки C, M ($M \in AB$) і паралельна прямій DE, де E – середина BC.



Мал. 97

275. Точка M – середина ребра BB_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки A і M паралельно B_1D. Знайдіть площу перерізу, якщо $AA_1 = a$, $AB = BC = b$.

276. У похилому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взято точки $M \in A_1B_1$, $N \in A_1D_1$ такі, що $B_1M : MA_1 = A_1N : ND_1 = 3:1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки N і M паралельно D_1D. Знайдіть периметр перерізу, якщо всі ребра паралелепіпеда дорівнюють a, $\angle ABC = 120°$.

277. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра AA_1. Через точки M, B, D проведено переріз. Доведіть, що цей переріз паралельний прямій A_1C, та знайдіть площу перерізу, якщо $A_1C = d$.

278*. Через середини M і N ребер AD і CC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно B_1D. Побудуйте переріз паралелепіпеда цією площиною та встановіть, у якому відношенні вона ділить ребро BB_1.

Вправи для повторення

279. Дано два паралелограми ABB_1A_1 і ACC_1A_1, які лежать у різних площинах. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

280. На відрізку AB взято точку M таку, що $AM : MB = 1:3$. Через точки A, B, M проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у точках A_1, B_1, M_1 відповідно. $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 16$ см. Знайдіть MM_1, якщо: а) відрізок AB не перетинає площину α; б) відрізок AB перетинає площину α.

281. Сторона ромба дорівнює a, а гострий кут α. Знайдіть діагоналі ромба та його площу.

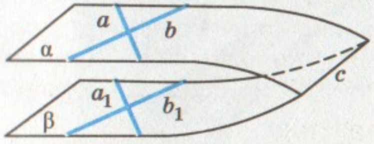
§8 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН

Дві площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.

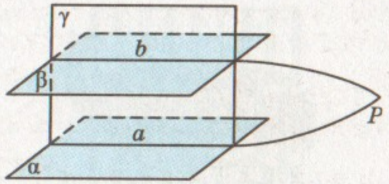
Якщо площини α і β паралельні, пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 8 (ознака паралельності площин). ***Якщо дві прямі, що перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі a і b, що перетинаються, лежать у площині α, а паралельні їм прямі a_1 і b_1 – у площині β (мал. 98). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.



Мал. 98



Мал. 99

Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по якійсь прямій c. Оскільки прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1 площини β, то згідно з теоремою 6 $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$.

Прямі a і b не перетинають c, оскільки пряма c лежить у площині β, з якою a і b не мають спільних точок. Лежать усі ці прямі в одній площині α. Виходить, $a \parallel c$ і $b \parallel c$ – дві прямі, які перетинаються і паралельні третій. Це суперечить аксіомі паралельності. Отже, площини α і β не можуть перетинатися, тобто вони паралельні.

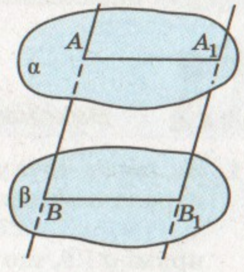
Теорема 9. ***Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b (мал. 99). Доведемо, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді вони перетинаються в деякій точці P, оскільки лежать в одній площині γ. Точка P належить прямим a і b, отже, і площинам α і β, в яких лежать ці прямі. Прийшли до суперечності: паралельні площини α і β мають спільну точку P. Отже, прямі a і b не можуть перетинатися, вони паралельні.

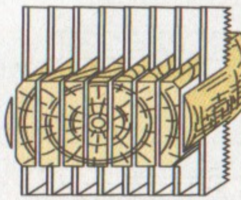
Теорема 10. ***Відрізки паралельних прямих, що відтинаються паралельними площинами, рівні.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай відрізки AB і A_1B_1 паралельні, а їх кінці лежать у паралельних площинах α і β (мал. 100). Площина, яка проходить через прямі AB і A_1B_1, перетинає паралельні площини α і β по паралельних прямих: $AA_1 \parallel BB_1$. Крім того, за умовою теореми $AB \parallel A_1B_1$. Чотирикутник ABB_1A_1 – паралелограм, отже, $AB = A_1B_1$. Що і треба було довести.

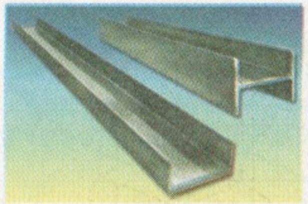


Мал. 100

У паралельних площинах розміщують перекриття поверхів багатоповерхових будинків, шибки подвійних вікон, верхні грані сходинок. Паралельні шари фанери,



Мал. 101



Мал. 102

пилки, що розпилюють колоду на дошки (мал. 101), протилежні грані цеглини, швелера, двотаврової балки (мал. 102), губки слюсарних лещат та ін.

Для допитливих

Теореми 8 і 9 доведені для випадків, коли площини α і β різні. Якщо вони суміщаються ($\alpha = \beta$), часто їх також вважають паралельними. Для цього випадку теореми 8 і 9 очевидні.

Відношення паралельності площин має такі самі властивості, як і відношення паралельності прямих.

Кожна площина паралельна сама собі (рефлексивність).

Якщо $\alpha \| \beta$, то $\beta \| \alpha$ (симетричність);

Якщо $\alpha \| \beta$ і $\beta \| \gamma$, то $\alpha \| \gamma$ (транзитивність).

Спробуйте обґрунтувати таке твердження:

«Якщо пряма a і площини α і β такі, що $a \| \alpha$ і $\alpha \| \beta$, то $a \| \beta$».

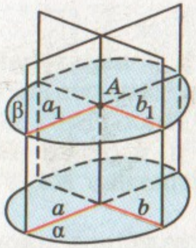
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які площини називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин паралельних площин січною площиною.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин двох паралельних прямих паралельними площинами.

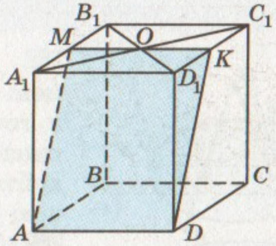
Виконаємо разом

1. Як через точку поза даною площиною провести площину, паралельну даній?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. У даній площині α проведемо які-небудь прямі a і b, що перетинаються (мал. 103). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1. Прямі a_1 і b_1



Мал. 103



Мал. 104

перетинаються, тому через них можна провести площину β. За теоремою 8 площина β паралельна площині α.

Спробуйте розв'язати задачу іншим способом, як показано на малюнку 107.

2. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через ребро нижньої основи і точку перетину діагоналей верхньої основи.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай переріз проходить через ребро AD і точку O перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1. Оскільки основи паралелепіпеда паралельні, то січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Тому через точку O проведемо відрізок MK, такий, що $MK \| AD$. Сполучимо точки A і M, K і D. Тоді $AMKD$ – шуканий переріз (мал. 104).

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

282. Відомо, що дві прямі, які лежать у площині α, паралельні площині β. Чи випливає з цього, що $\alpha \| \beta$?

283. Кожна діагональ ромба $ABCD$ паралельна площині α. Як розміщені площини α і (ABC)?

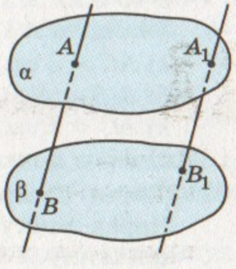
284. Чи буде площина трапеції паралельна площині α, якщо цій площині паралельні:

а) основи трапеції; б) бічні сторони трапеції?

285. Чи можуть мати однакові довжини відрізки непаралельних прямих, що містяться між паралельними площинами?

286. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

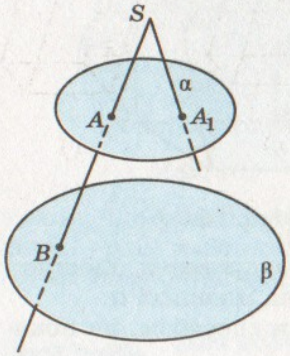
287. Чи паралельні прямі AB і A_1B_1, якщо паралельні площини α і β вони перетинають у точках A, B, A_1, B_1, як показано на малюнку 105?



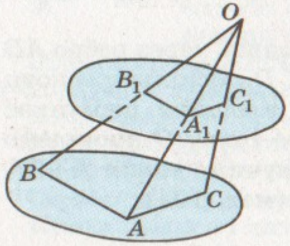
Мал. 105

6*

А



Мал. 106



Мал. 107

288. Площини α і β паралельні. Промені SA і SA_1 перетинають площину α в точках A і A_1 (мал. 106). SA перетинає площину β у точці B. Побудуйте точку B_1 перетину SA_1 з площиною β.

289. Пряма a паралельна площині α. Як через пряму a провести площину, паралельну α?

290. Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

291. Відрізки OA, OB і OC не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка проходить через їхні середини, паралельна площині (ABC) (мал. 107).

292. Точка O – спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, які не лежать в одній площині. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.

293. Чи можуть перетинатися площини α і β, якщо кожна з них паралельна площині γ?

294. Доведіть, що коли пряма або площина перетинають одну з двох паралельних площин, то перетинають і другу.

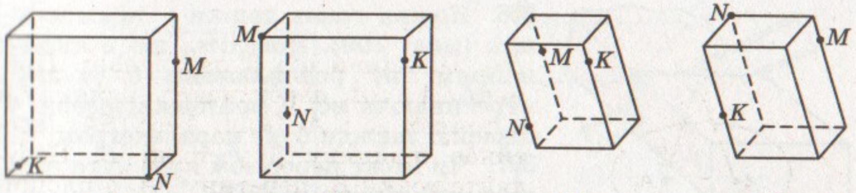
295. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина простору перетинає хоча б одну з цих площин.

296. Доведіть, що через дві будь-які мимобіжні прямі можна провести єдину пару паралельних площин.

297. Через точку C, яка лежить поза паралельними площинами α і β, проведено прямі a і b, що перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β у точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:

а) $AC = 2$ см, $AB = 6$ см, $BB_1 = 10$ см;
б) $A_1C : A_1B_1 = 2:3$, $BB_1 = 10$ см;
в) $AC = 2$ см, $BB_1 = 8$ см, $CB = AA_1$;
г) $AC = 2$ см, $BB_1 = 24$ см, $BA = AA_1$.

298. Точка C лежить між паралельними площинами α і β. Через точку C проведено прямі a і b, які перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β у точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:



а) б) в) г)

Мал. 108

а) $AC = 2$ см, $BC = 5$ см, $B_1B = 15$ см;
б) $AC : BC = 2:3$, $BB_1 = 9$ см;
в) $AC = 1$ см, $B_1B = 6$ см, $AA_1 = AB$;
г) $AC = 3$ см, $B_1B = 12$ см, $AA_1 = CB$.

299. Паралельні відрізки AB і CD містяться між паралельними площинами α і β так, що точки A і C належать площині α, а B і D – площині β. Знайдіть AD і BC, якщо:

а) $DC = 25$ см, $AC = 7$ см, $\angle CAD = 90°$;
б) $AC = 5$ см, $CD = 8$ см, $\angle ACD = 120°$.

300. Дано тетраедр $ABCD$. $M \in DB$, $N \in DB$, $DM = MN = NB$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (ANC). Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо $AN = CN = 25$ см, $AC = 14$ см.

301. Точка A_1 ділить ребро PA тетраедра $PABC$ у відношенні $PA_1 : A_1A = 2:3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка паралельна площині (ABC) і проходить через точку A_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо ABC – рівносторонній трикутник і $AB = 20$ см.

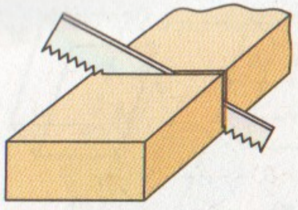
302. Точка X ділить ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні $AX : XB = 2:3$. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка паралельна площині (AA_1C_1) і проходить через точку X. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

303. Накресліть паралелепіпеди (мал. 108, *а–г*) в зошит і побудуйте їх перерізи, які проходять через точки M, N, K.

Б

304. Рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщено в площинах α і β так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 паралельні. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

305. Доведіть, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.



Мал. 109

306. Кожна грань дошки – прямокутник (мал. 109). Доведіть, що в якому напрямі не розпилювали б дошку, перетинаючи всі її поздовжні ребра, у перерізі завжди буде паралелограм.

307. Чи може перерізом куба бути правильний п'ятикутник?

308. $ABCDEFA$ – неплоска замкнена ламана із шести ланок. Доведіть, що коли $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ і $CD \parallel FA$, то $AB = DE$, $BC = EF$ і $CD = FA$.

309. Відрізки AB і CD паралельних прямих розміщені між паралельними площинами α і β так, що точки A і C лежать у площині α, а B і D – у площині β. $CB = 7$ см, $AD = \sqrt{129}$ см. Знайдіть AB і BD, якщо DC на 3 см більший, ніж AC.

310. Дано тетраедр $ABCD$, $M \in AD$, $AM : MD = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (BDC). Знайдіть площу і периметр перерізу, якщо $\triangle BDC$ – рівносторонній і його площа дорівнює 64 см^2.

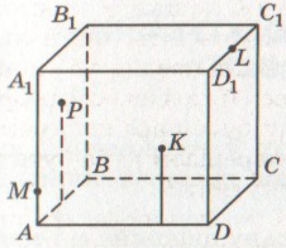
311. Дано тетраедр $ABCD$. $P \in BC$, $BP = CP$, $M \in AC$, $CM : AC = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (ADP). Знайдіть сторони перерізу, якщо $AB = AC = 20$ см, $BC = 16$ см, $AD = DB = DC = 17$ см.

312. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $M \in AA_1$, $N \in DD_1$, $K \in CC_1$, $AM : MA_1 = DN : ND_1 = C_1K : KC = 2 : 1$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки M, N, K. Знайдіть його периметр, якщо $AB = a$.

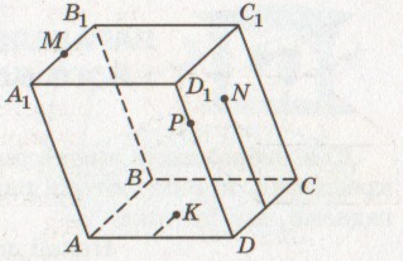
313. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M – середина A_1B_1. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку M паралельно площині (BB_1D_1). Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

314. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$, K – середина ребра A_1B_1 і $\angle KAC = \alpha$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точки A, C, K, і знайдіть його площу. Обчисліть, якщо $a = 3{,}78$ дм, $\alpha = 75°$.

315. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M – середина ребра CC_1. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через вершину C_1 паралельно площині (BMD). Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо ребро куба a.



Мал. 110



Мал. 111

316. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = a$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через вершину D, паралельно площині (AB_1C). Знайдіть периметр і площу перерізу.

317*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Точка P лежить в грані AA_1B_1B, K – в грані AA_1D_1D, $L \in C_1D_1$, $M \in AA_1$ (мал. 110). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку M, паралельно площині (PKL).

318*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. $M \in A_1B_1$, N лежить у площині грані DD_1C_1C, K – у площині грані $ABCD$ (мал. 111). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку $P \in DD_1$, паралельно площині (MNK).

319*. Дано три паралельні площини α, α_1, α_2 і прямі a, b, які перетинають їх відповідно в точках A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2. Доведіть, що $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$.

320*. Проведіть дві паралельні площини, які відтинають на трьох даних попарно мимобіжних прямих рівні відрізки.

321. *ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.* Зробіть з картону або цупкого паперу модель до теореми 8.

Вправи для повторення

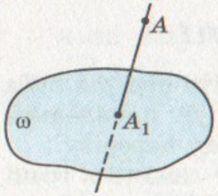
322. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см і ділиться діагоналлю на два відрізки так, що різниця між ними дорівнює 2 см. Знайдіть основи трапеції.

323. Прямі a і b – мимобіжні. Точки A і B лежать на прямій a, а точки M і N – на прямій b. Яке взаємне розташування прямих AN і BM?

324. $ABCD$ – квадрат, точка K не лежить в його площині. Знайдіть периметр чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, якщо A_1, B_1, C_1, D_1 – середини відрізків AK, BK, CK, DK і $AB = 8$ см.

§ 9 ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Для зображення просторових фігур у стереометрії, як і в кресленні, користуються паралельним проектуванням. Пригадаємо, що це таке.



Мал. 112

Нехай дано довільну площину ω і точку A (мал. 112). Проведемо через точку A пряму, яка перетинає площину ω у деякій точці A_1. Знайдену таким способом точку A_1 називають *проекцією точки A* на площину ω, пряму AA_1 – *проектуючою прямою*, ω – *площиною проекцій*.

Щоб побудувати проекцію будь-якої фігури, треба спроектувати на площину проекцій кожну точку даної фігури. Якщо проектуючі прямі проводять через одну точку, кажуть про *центральне проектування*. Якщо проектування здійснюється паралельними прямими, його називають *паралельним проектуванням*, а побудовані проекції – *паралельними проекціями*. У стереометрії фігури зображають зазвичай за допомогою паралельного проектування.

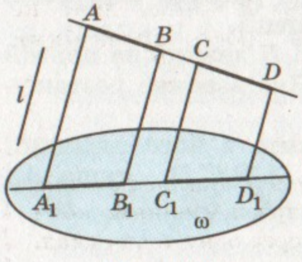
! **Теорема 11.** ***Якщо відрізки, які проектуються, не паралельні проектуючій прямій, то при паралельному проектуванні:***

1) відрізки фігури зображаються відрізками;

2) паралельні відрізки – паралельними відрізками, або відрізками однієї прямої;

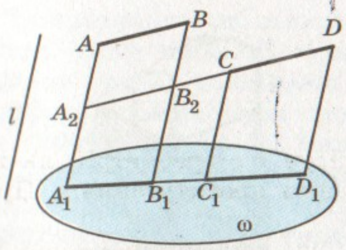
3) відношення довжин паралельних відрізків або відрізків однієї прямої зберігається.

ДОВЕДЕННЯ. 1) Усі прямі, паралельні проектуючій прямій l, які перетинають даний відрізок AB, заповнюють частину площини α, обмежену паралельними прямими AA_1 і BB_1 (див. задачу 220). Ця частина площини перетинає площину проекцій ω по відрізку A_1B_1 – проекції відрізка AB на площину ω (мал. 113).

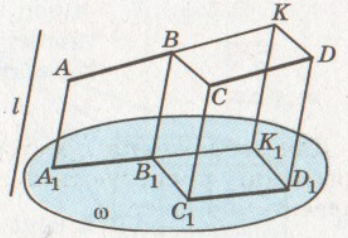


Мал. 113

2) Нехай відрізки AB і CD, що проектуються, паралельні. Усі прямі, що їх перетинають і паралельні l, заповнюють частини однієї площини (мал. 114) або паралельних площин



Мал. 114



Мал. 115

(мал. 115). Ці частини площин перетинають площину ω відповідно по відрізках однієї прямої або по паралельних відрізках A_1B_1 і C_1D_1 – проекціях даних відрізків на площину ω.

3) Якщо відрізки AB і CD, які проектують, розміщені на одній прямій (мал. 113), то за теоремою Фалеса:

$$A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD.$$

Якщо відрізки AB і CD паралельні, а їх проекції A_1B_1 і C_1D_1 лежать на одній прямій (мал. 114), то ABB_2A_2 – паралелограм. У цьому випадку

$$A_1B_1 : C_1D_1 = A_2B_2 : CD = AB : CD.$$

Нарешті, якщо проекції A_1B_1 і C_1D_1 даних паралельних відрізків AB і CD не лежать на одній прямій (мал. 115), то побудуємо паралелограм $CDKB$. Його проекція – паралелограм $C_1D_1K_1B_1$. Маємо:

$$A_1B_1 : C_1D_1 = A_1B_1 : B_1K_1 = AB : BK = AB : CD.$$

Отже, завжди

$$A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD,$$

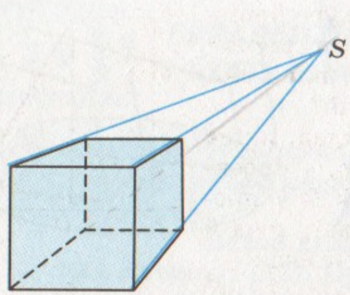
тобто **довжини проекцій паралельних відрізків або відрізків однієї прямої відносяться, як довжини відрізків, які проектують.**

Розглянуті властивості паралельного проектування дають змогу наочно і з більшою визначеністю зображати неплоскі фігури на площині.

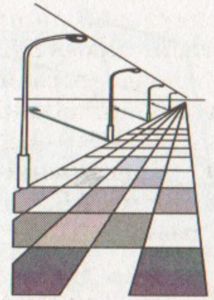
Оскільки інших проекцій, крім паралельних, далі не розглядатимемо, умовимося їх називати просто проекціями без слова «паралельні».

Для допитливих

Крім паралельного проектування, чимало фахівців користуються і центральним проектуванням, коли проектуючі прямі проходять через одну точку (мал. 116). Таким проектуванням, зокрема, користуються



Мал. 116



Мал. 117

художники, називаючи його перспективою (мал. 117). Властивості центрального проектування відрізняються від паралельного проектування. Леонардо да Вінчі писав: «Живописець і є той, хто за потребою свого мистецтва створив... перспективу». І А. Дюрер зізнавався: «Виявити закони перспективи я бажав більше, ніж отримати королівство».

Властивості центрального проектування ми не розглядатимемо. Говорячи далі про проекції, матимемо на увазі тільки паралельні проекції.

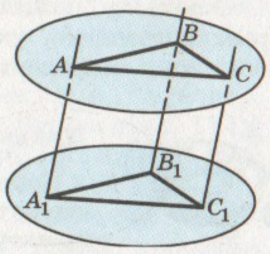
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Поясніть кількома реченнями, що таке проектування.
2. Які види проектування вам відомі?
3. Що таке паралельне проектування?
4. Сформулюйте і доведіть найважливіші властивості паралельного проектування.

Виконаємо разом

1. Доведіть, що коли $\triangle A_1B_1C_1$ – проекція $\triangle ABC$ і площини цих трикутників паралельні, то $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Оскільки площини трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні (мал. 118), то паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1, що містяться між ними, рівні. Отже, чотирикутники ABB_1A_1, ACC_1A_1 і BCC_1B_1 – паралелограми, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. За трьома сторонами трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні.



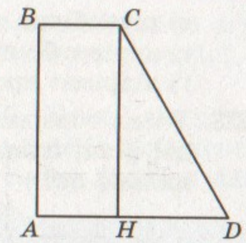
Мал. 118

2. Чи правильно, що плоска фігура дорівнює своїй проекції тільки за умови, якщо вона розміщена в площині, паралельній площині проекцій?

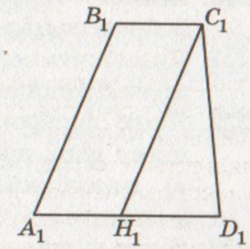
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Ні. Наприклад, якщо $ABCD$ – правильний тетраедр, а проектуюча пряма AB, то грань BCD – проекція грані ACD. Ці грані рівні, хоча й не лежать у паралельних площинах.

3. Нехай трапеція $A_1B_1C_1D_1$ (мал. 119, *б*) є паралельною проекцією прямокутної трапеції $ABCD$ (мал. 119, *а*). Побудуйте проекцію висоти CH цієї трапеції.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай у трапеції $ABCD$ кути A і B прямі. Тоді висота CH буде паралельною стороні AB. Оскільки при паралельному проектуванні паралельні прямі переходять у паралельні прямі, то потрібно через точку C_1 провести пряму C_1H_1, паралельну A_1B_1.



а)



б)

Мал. 119

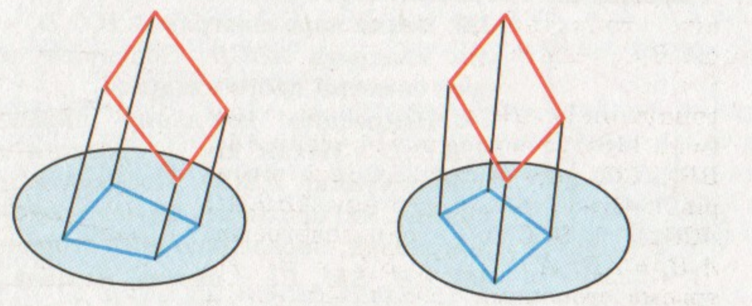
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

325. Проекція фігури – точка. Назвіть цю фігуру.
326. Відрізок a – проекція відрізка b. Чи завжди a коротший, ніж b?
327. $ABCD$ – паралельна проекція паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ на площину α (мал. 120). Укажіть помилки на малюнках.
328. Чи може бути:

а) ромб проекцією квадрата;

б) ромб проекцією трапеції;



Мал. 120

в) рівнобічна трапеція проекцією нерівнобічної;
г) нерівнобічна трапеція проекцією рівнобічної;
ґ) відрізок проекцією неплоскої фігури?

329. Учень говорить: «Якщо фігура A така, що її проекції на дві різні площини – відрізки, то A – відрізок». Чи правильно це?

А

330. Кожна сторона трикутника паралельна його проекції. Зобразіть малюнок. Доведіть, що ці трикутники рівні.

331. Чи можуть непаралельні прямі проектуватися в паралельні прямі? Відповідь обґрунтуйте. Виконайте малюнки.

332. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину двох прямих, які: а) перетинаються; б) паралельні; в) мимобіжні? Розгляньте різні випадки. Виконайте малюнки.

333. Якою фігурою може бути проекція прямого кута?

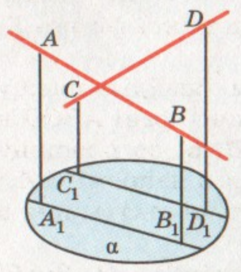
334. Як потрібно розмістити у просторі три точки, щоб їх паралельними проекціями були: а) одна точка; б) дві точки; в) три точки, які лежать на одній прямій; г) три точки, які не лежать на одній прямій? Виконайте малюнки.

335. Доведіть, що паралельною проекцією многокутника, площина якого паралельна площині проекцій, є многокутник, рівний даному.

336. Чи перетинаються прямі AB і CD, зображені на малюнку 121, якщо A_1B_1 і C_1D_1 – їхні проекції на площину α?

337. Трикутник $A_1B_1C_1$ – проекція трикутника ABC. Побудуйте проекції середніх ліній і медіан трикутника ABC.

338. Намалюйте довільний паралелограм. Нехай він – проекція ромба з кутом 120°. Побудуйте проекцію висоти ромба, проведеної з вершини цього кута.



Мал. 121

339. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ – проекція квадрата $ABCD$. Побудуйте проекції осей симетрії цього квадрата.

340. Накресліть довільний паралелограм $A_1B_1C_1D_1$. Нехай він – проекція деякого прямокутника $ABCD$. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку перетину діагоналей, паралельно його сторонам.

341. BH, BM, BL – висота, медіана і бісектриса трикутника ABC. $\triangle A_1B_1C_1$ – паралельна проекція $\triangle ABC$. Чи буде паралельною проекцією відрізків BH, BM, BL висота, медіана і бісектриса $\triangle A_1B_1C_1$? Відповідь обґрунтуйте.

342. Накресліть довільний трикутник $A_1B_1C_1$. Нехай він є паралельною проекцією рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M ($M \in AB$) перпендикулярно до сторін трикутника.

343. Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією ромба $ABCD$. Побудуйте проекції перпендикулярів, проведених з точки M ($M \in BC$) до діагоналей ромба.

344. P – внутрішня точка квадрата $ABCD$. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ і його внутрішня точка M_1 – паралельна проекція цього квадрата і точки M. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M перпендикулярно до: а) сторін квадрата; б) діагоналей квадрата.

Б

345. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину: а) куба; б) тетраедра; в) чотирикутної піраміди? Виконайте відповідні малюнки.

346. Намалюйте довільну трапецію $A_1B_1C_1D_1$. Нехай вона – проекція деякої рівнобічної трапеції $ABCD$. Побудуйте проекцію висоти цієї трапеції, проведеної з вершини B.

347. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією ромба $ABCD$, у якого $\angle A = 60°$. Побудуйте проекції висот ромба, проведених з точки A.

348. Накресліть довільний $\triangle A_1B_1C_1$. Нехай він – паралельна проекція $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) з катетами 6 см і 8 см. Побудуйте проекції центрів кіл, вписаного в трикутник і описаного навколо нього.

349. Паралельною проекцією точок M, N, K, що лежать на одній прямій на площину α, є точки M_1, N_1, K_1. Знайдіть M_1N_1 і M_1K_1, якщо $MN = 6$ см, $MK = 4$ см, $N_1K_1 = 5$ см.

350. Чи правильно, що коли F_1 – проекція плоскої фігури F, то і F – проекція фігури F_1?

351. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. Знайдіть площу проекції трикутника AB_1C: а) на площину грані $ABCD$ в результаті проектування в напрямі B_1B; б) на площину грані ABB_1A_1 в результаті проектування в напрямі C_1A_1; в) на площину грані CBB_1C_1 в результаті проектування в напрямі AC_1.

352. $PABC$ – тетраедр, площа грані ABC дорівнює Q. Знайдіть площу паралельної проекції його грані PBC на площину (ABC) у результаті проектування: а) у напрямі PA; б) у напрямі PM, де M – середина ребра AB.

353*. Паралельною проекцією правильного п'ятикутника є п'ятикутник $ABCDE$, у якого $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 90°$. Знайдіть довжини решти сторін п'ятикутника $ABCDE$.

Вправи для повторення

354. Дано пряму a і точку M, $M \notin a$. Через точку M проведіть пряму b так, щоб прямі a і b були: а) паралельні; б) мимобіжні; в) перетиналися.

355. K, P, T – середини ребер AB, CD і A_1B_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз цього паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки: а) K, P, T; б) K, P, A_1; в) C, D, T.

356. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$ і $\angle B_1AC = \alpha$. Знайдіть площу трикутника AB_1C.

§10 ЗОБРАЖЕННЯ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ

У стереометрії розглядаються не тільки плоскі, а й неплоскі фігури. Зображати неплоскі фігури на площині непросто: неминуче доводиться спотворювати деякі їхні елементи.

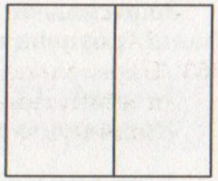
Особливо живописці намагалися з'ясувати, як найкраще просторові фігури зображати на плоскому полотні, щоб отримати зображення, схожі з реальними. Вони виявили, що для цього найбільш придатна *перспектива* – центральне проектування.

Для геометрів, креслярів та інших фахівців кращим виявилося паралельне проектування – коли паралельні відрізки фігури-оригіналу проектуються на паралельні відрізки.

Якщо маємо яку-небудь фігуру F – оригінал і її паралельну проекцію F_1 на площині, то F_1 можна вважати зображенням фігури F. А як зображати на аркуші паперу надто великі об'єкти, наприклад куб зі стороною 10 м? Домовилися зображенням такого куба вважати його проекцію на площину, зменшену в кілька разів.

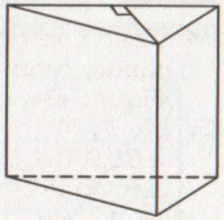
У геометрії *зображенням фігури* називається будь-яка фігура, подібна до паралельної проекції даної фігури. При цьому маються на увазі проекції, які дають змогу однозначно визначити форму зображуваної фігури. Оскільки, наприклад, кожний многокутник можна спроектувати на площину так, що його проекцією

буде відрізок. Паралельною проекцією куба може бути, крім інших, прямокутник з відрізком (мал. 122). А такі зображення не наочні і незрозумілі: існує безліч різних геометричних тіл, відмінних від куба, що мають такі самі проекції (мал. 123, 124).



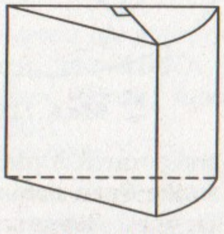
Мал. 122

Якщо проектуюча пряма паралельна площині плоскої фігури, то проекцією такої фігури є точка, відрізок, промінь чи пряма. Зокрема, проекцією трикутника, довільного многокутника, кола і круга може бути відрізок. Такі проекції називають *виродженими*. Здебільшого у стереометрії розглядають невироджені проекції.



Мал. 123

Щоб зображення многогранника було зрозумілішим, з усіх можливих його проекцій вибирають такі, на яких є зображення усіх його ребер. При цьому «невидимі» ребра (розташовані за іншими частинами многогранника) зображають *штриховими відрізками*. Креслярі користуються й іншими видами ліній (мал. 125).



Мал. 124

У стереометрії найчастіше доводиться мати справу із зображеннями неплоских фігур: призм, пірамід і т. п. А щоб правильно виконувати їх, бажано знати, якими можуть бути зображення трикутника, паралелограма, кола тощо.

Зображенням паралелограма може бути будь-який інший паралелограм, оскільки при паралельному проектуванні паралельні відрізки відображаються на паралельні відрізки. Зокрема, ромб, прямокутник, квадрат можна зображати будь-яким паралелограмом. І навпаки, будь-який паралелограм можна вважати зображенням квадрата, ромба, прямокутника чи іншого паралелограма.

Зображенням трапеції може бути будь-яка інша трапеція з таким самим відношенням довжин основ, оскільки при паралельному проектуванні відношення довжин паралельних відрізків зберігається.

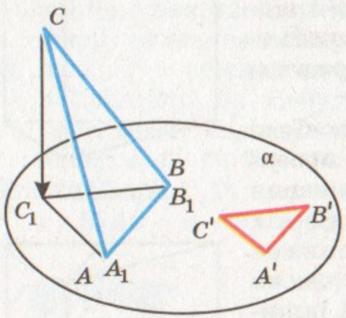
———————— тонка
———————— потовщена
– – – – – – – – штрихова
— · — · — · — штрихпунктирна
.... пунктирна

Мал. 125

Зображаючи плоскі фігури при паралельному проектуванні, корисно враховувати дві такі теореми.

Теорема 12. ***Довільний трикутник $A'B'C'$ може бути зображенням даного трикутника ABC.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай в площині α дано $\triangle A'B'C'$, а в просторі $\triangle ABC$. Доведемо, що $\triangle ABC$ можна так розмістити у просторі відносно площини α і задати такий напрям проектування, що проекцією $\triangle ABC$ буде трикутник, подібний до $\triangle A'B'C'$.



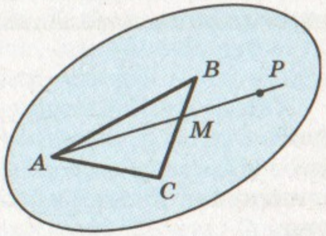
Мал. 126

Побудуємо у площині α $\triangle A_1B_1C_1$, подібний до $\triangle A'B'C'$ так, щоб $A_1B_1 = AB$ (мал. 126). $\triangle ABC$ розмістимо у просторі так, щоб сторони A_1B_1 і AB сумістилися, а площина $\triangle ABC$ не збігалася з площиною α. Тоді при паралельному проектуванні в напрямі CC_1 проекцією $\triangle ABC$ буде $\triangle A_1B_1C_1$, подібний до $\triangle A'B'C'$. А це означає, що $\triangle A'B'C'$ – зображення $\triangle ABC$.

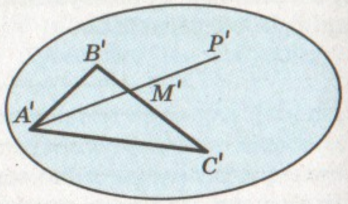
Із цієї теореми випливає, що зображенням даного трикутника (у тому числі й рівнобедреного, рівностороннього, прямокутного) може бути довільний трикутник.

Теорема 13. ***Якщо на площині зображень α зображенню $\triangle ABC$ відповідає $\triangle A'B'C'$, то на площині можна однозначно побудувати зображення довільної точки, яка лежить у площині $\triangle ABC$.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай P – довільна точка, що лежить у площині $\triangle ABC$ (мал. 127), і промінь AP перетинає сторону BC у точці M. Побудуємо зображення точки P у площині α. Нехай $\triangle A'B'C'$ – зображення $\triangle ABC$ (мал. 128). Скориставшись

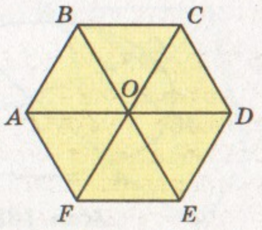


Мал. 127



Мал. 128

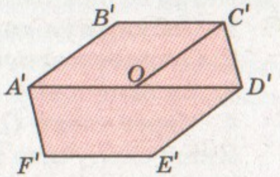
умовою $B'M' : M'C' = BM : MC$, на прямій $B'C'$ побудуємо єдину точку M'. А за умовою $A'M' : M'P' = AM : MP$ можемо побудувати точку P' – зображення точки P.



Мал. 129

На основі цих теорем зображення плоскої фігури F можна виконувати в такий спосіб:

1. Виділити в F який-небудь трикутник.
2. Зобразити цей трикутник довільним трикутником.
3. Побудувати зображення інших точок фігури F, користуючись тільки тими її властивостями, які зберігаються при паралельному проектуванні.



Мал. 130

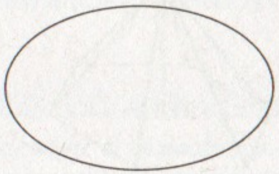
Для виконання деяких зображень доцільно в заданій фігурі виділяти не трикутник, а інший многокутник. Наприклад, щоб побудувати зображення правильного шестикутника $ABCDEF$ (мал. 129), потрібно врахувати, що $ABCO$ – ромб, точка O – центр симетрії шестикутника. Отже, щоб зобразити цей шестикутник, потрібно (мал. 130):

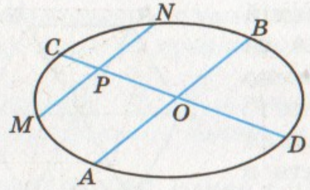
1. Побудувати довільний паралелограм $A'B'C'O'$ – зображення ромба $ABCO$.
2. Побудувати точки D', E', F', симетричні точкам A', B', C' відносно точки O'.

Правильний шестикутник можна зображати довільним шестикутником, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні й одній з діагоналей, що проходить через центр шестикутника.

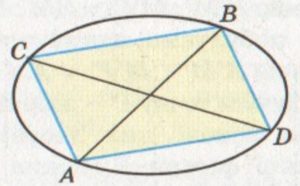
Коло в стереометрії зображають довільним еліпсом (мал. 131), адже при паралельному проектуванні коло відображається на еліпс. Тому зображення циліндра, конуса та інших фігур обертання містять різні еліпси. Детальніше з ними ви ознайомитеся в 11-му класі.

При зображенні многокутників, вписаних у коло або описаних навколо нього, користуються поняттям спряжених діаметрів. Два діаметри еліпса називаються *спряженими*, якщо кожний з них ділить хорди, паралельні іншому, навпіл. На оригіналі спряженим діаметрам еліпса відповідають


Мал. 131



Мал. 132



Мал. 133

перпендикулярні діаметри кола. Щоб побудувати спряжені діаметри еліпса (мал. 132), потрібно:

1. Побудувати довільний діаметр AB.
2. Провести довільну хорду $MN \parallel AB$.
3. Знайти точку P – середину хорди MN.
4. Через точки O і P провести діаметр CD.

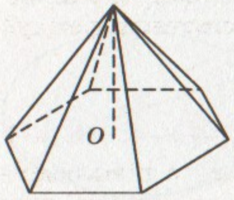
Якщо сполучити послідовно точки A, C, B, D, то отримаємо зображення квадрата, вписаного в коло (мал. 133). Чому?

Креслити просторові фігури потрібно так, щоб зображення було правильним (було фігурою, подібною до паралельної проекції оригіналу) і наочним (давало правильне уявлення про форму оригіналу), швидко і легко виконувалося.

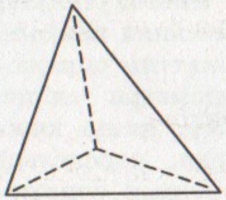
Щоб зобразити піраміду (мал. 134), потрібно:

1. Побудувати зображення многокутника, який лежить в її основі.
2. За умовою задачі знайти положення точки O – основи висоти SO. (Пригадайте, що таке висота піраміди.)
3. З точки O вертикально вгору провести промінь, на якому вибрати точку S – вершину піраміди.
4. Сполучити точку S з вершинами основи.
5. Виділити видимі і невидимі ребра піраміди.

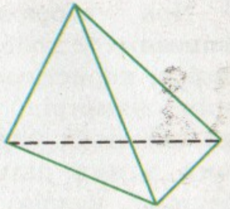
Зображенням довільного тетраедра при паралельному проектуванні може бути будь-який чотирикутник з проведеними в ньому діагоналями. Для наочності невидимі ребра тетраедра зображають штриховими лініями (мал. 135). Зображення тетраедра на малюнку 136 правильне, але не наочне.



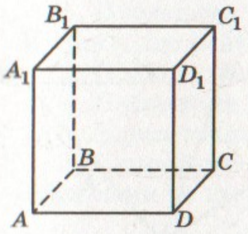
Мал. 134



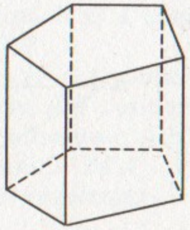
Мал. 135



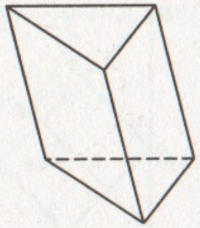
Мал. 136



Мал. 137



Мал. 138



Мал. 139

Паралелепіпед краще будувати, починаючи з основи (мал. 137):

1. Побудувати довільний паралелограм $ABCD$.
2. По один бік від площини цього паралелограма провести паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, що мають рівні довжини.
3. Побудувати паралелограм $A_1B_1C_1D_1$.
4. Виділити видимі й невидимі ребра.

Побудову призми виконують аналогічно, починаючи з основи. Для наочності бічні ребра прямої призми зображають вертикальними відрізками (мал. 138), а похилої призми – похилими (мал. 139).

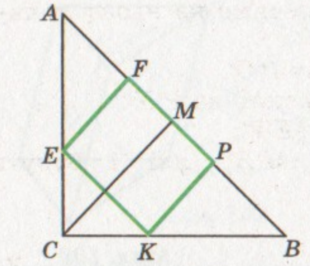
Різні способи зображення просторових фігур на площині розглядаються в кресленні і в нарисній геометрії.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

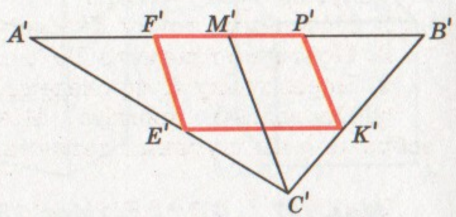
1. Що називають зображенням фігури у стереометрії?
2. Який вид проектування використовують при зображенні фігур у стереометрії?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про зображення трикутника.
4. Якими фігурами можна зображати паралелограм, прямокутник, квадрат, ромб?
5. Якими фігурами можна зображати трапецію?
6. Якою фігурою у стереометрії зображають коло?
7. Як побудувати спряжені діаметри еліпса?
8. Як побудувати прямокутний паралелепіпед, похилий паралелепіпед, трикутну призму, чотирикутну піраміду?

Виконаємо разом

1. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник, якщо дві вершини квадрата лежать на гіпотенузі, а дві інші – на катетах.



Мал. 140



Мал. 141

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай квадрат $EFPK$ вписаний в $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $AC = BC$ (мал. 140). Якщо трикутник рівнобедрений прямокутний, то $\angle A = 45°$, тоді $\angle AEF = 45°$. Значить, $\triangle AEF$ – рівнобедрений прямокутний і $AF = FE = FP$. Аналогічно доводиться, що $BP = PK = PF$. Тоді $AF = FP = PB$.

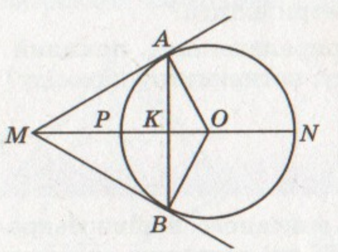
Проведемо $CM \perp AB$, тоді M – середина AB. Оскільки $KP \perp AB$, $EF \perp AB$, то $KP \parallel EF \parallel CM$. Враховуючи все це, можемо виконати побудову зображення (мал. 141).

1. Побудуємо довільний $\triangle A'B'C'$, який є зображенням $\triangle ABC$.
2. Точками F' і P' поділимо відрізок $A'B'$ на три рівні частини.
3. Проведемо відрізок $C'M'$, де M' – середина $A'B'$.
4. Проведемо $E'F' \parallel C'M'$ і $P'K' \parallel C'M'$. Чотирикутник $E'F'P'K'$ – зображення шуканого квадрата.

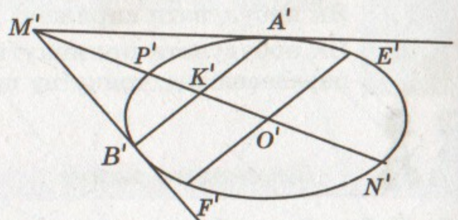
2. PN – діаметр кола. На промені NP знайдіть точку M таку, що дотичні, проведені з неї до кола, утворюють кут $60°$ (мал. 142). Побудуйте зображення точки M та дотичних.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай MA і MB – дотичні, $\angle AMB = 60°$. Тоді $\angle AMO = \angle OAK = 30°$, тому $MO = 2OA = 2OP$ і $OK = 0{,}5OA = 0{,}5OP$. Враховуючи, що $AB \perp MO$, можемо будувати зображення.

Нехай еліпс із центром O' є зображенням даного кола, а діаметр $P'N'$ – зображенням діаметра PN (мал. 143).



Мал. 142



Мал. 143

1. Проведемо промінь $N'P'$ і позначимо на ньому точку M' таку, що $O'M' = 2O'P'$.
2. Позначимо точку K' – середину $P'O'$.
3. Побудуємо діаметр $E'F'$, спряжений до $P'N'$.
4. Через точку K' проведемо $A'B' \parallel E'F'$.
5. Проведемо промені $M'A'$ і $M'B'$, які і будуть зображенням шуканих дотичних.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

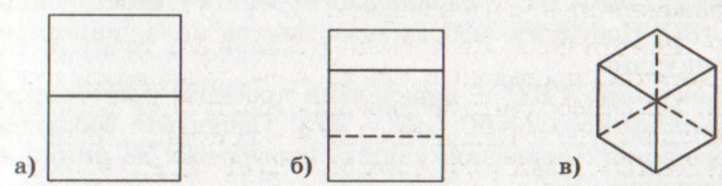
357. Чи може рівносторонній трикутник бути зображенням прямокутного трикутника? А тупокутного?

358. Чи може зображенням квадрата бути ромб? А зображенням трапеції паралелограм?

359. Зображенням якого трикутника є трикутник ABC, якщо точка B лежить на еліпсі, а AC – діаметр цього еліпса?

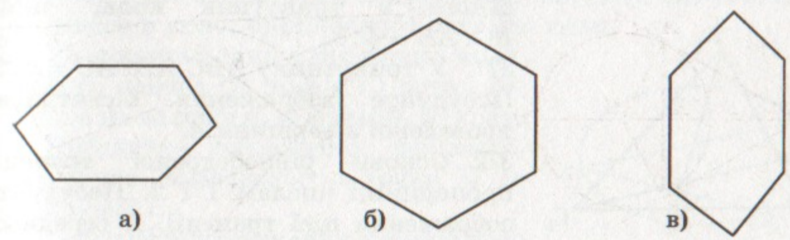
360. AB і CD два довільні діаметри еліпса. Зображенням якого чотирикутника є чотирикутник $ACBD$? А якщо діаметри спряжені?

361. Яка з наведених на малюнку 144 фігур є зображенням (паралельною проекцією) куба?

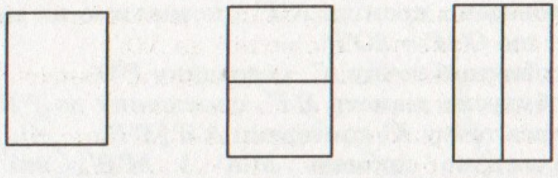


Мал. 144

362. Який із шестикутників, що на малюнку 145, є зображенням правильного шестикутника? Чому?



Мал. 145



Мал. 146

363. Чи можна малюнок 146 вважати зображенням прямокутного паралелепіпеда? Чи наочне таке його зображення?

А

364. Точки A_1, A_2, A_3, які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями двох вершин і точки перетину діагоналей паралелограма. Побудуйте зображення паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

365. Точки A_1, A_2, A_3, які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями однієї вершини і середин двох сторін трикутника. Побудуйте зображення трикутника. Скільки розв'язків має задача?

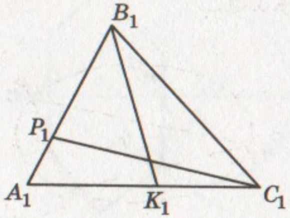
366. Побудуйте зображення прямих, які проходять через точку M – внутрішню точку рівностороннього $\triangle ABC$, перпендикулярно до сторін цього трикутника.

367. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник.

368. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція рівнобедреного прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте зображення серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника.

369. Дано зображення трикутника і двох його висот (мал. 147). Побудуйте зображення центра описаного кола.

370. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте зображення центра вписаного в трикутник кола, якщо $BC:AB = 4:5$.



Мал. 147

371. У трикутнику ABC $AB:AC = 2:3$. Побудуйте зображення бісектриси, проведеної з вершини A.

372. Основи рівнобедреної трапеції пропорційні числам 1 і 2. Побудуйте зображення цієї трапеції, її середньої лінії та висот.

373. Накресліть еліпс і проведіть довільний діаметр AB. Побудуйте діаметр, спряжений до AB.

374. Побудуйте зображення: а) квадрата, вписаного в коло; б) квадрата, описаного навколо кола.

375. Побудуйте зображення правильного трикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.

376. Побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в коло.

377. Побудуйте зображення прямокутника, вписаного в коло.

378. На колі дано точку M. Побудуйте зображення дотичної, проведеної до кола в цій точці.

379. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в прямокутний трикутник, якщо вони мають спільний прямий кут і: а) трикутник рівнобедрений; б) катети, пропорційні числам 3 і 5; в) гіпотенуза і катет відносяться як $13:5$.

Б

380. Побудуйте зображення паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо дано зображення точок: а) A, B, C, D_1; б) A, B, D, A_1; в) B, B_1, C_1, D.

381. Гострий кут ромба дорівнює 60°. Побудуйте зображення висот цього ромба, проведених з вершини: а) тупого кута; б) гострого кута.

382. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника відносяться як $3:2$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник.

383. У рівнобедреному трикутнику ABC висота AH ділить сторону BC у відношенні $BH:HC = 3:1$. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника.

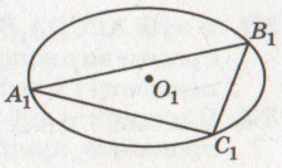
384. Еліпс, центр якого невідомий, є зображенням кола. Побудуйте зображення центра кола.

385. Дано зображення кола, його центра та трикутника, вписаного в це коло (мал. 148). Побудуйте зображення висот цього трикутника.

386. Побудуйте зображення правильного шестикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.

387. На площині дано зображення кола, його центра O, пряма l і точка M, яка не належить ні прямій, ні колу. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з точки M до прямої l.

388. Побудуйте зображення правильного п'ятикутника.



Мал. 148

389. Сторони прямокутника відносяться як $\sqrt{3}:1$. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з вершини прямокутника до його діагоналі.

390. Діагоналі ромба відносяться як $1:2$. Побудуйте зображення висоти, проведеної з вершини тупого кута.

391. Побудуйте зображення правильного трикутника, вписаного в квадрат, якщо одна його вершина збігається з вершиною квадрата, а дві інші – лежать на сторонах квадрата.

392. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівносторонній трикутник так, що дві його сусідні вершини лежать на одній стороні трикутника, а дві інші – по одній на двох інших сторонах трикутника.

393. Побудуйте зображення правильного трикутника, вписаного в квадрат так, що вони мають спільну сторону, а вершина трикутника лежить всередині цього квадрата.

394. Побудуйте зображення ромба $AMNK$, вписаного в $\triangle ABC$ так, що $\angle A$ в них спільний, якщо:

а) $AB = BC = AC$;
б) $AB = BC = 2AC$;
в) $AB : AC = 3 : 5$.

395. $ABCDEF$ – правильний шестикутник. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з вершини A на:

а) діагональ CF;
б) сторону CD;
в) сторону BC.

Вправи для повторення

396. Правильний шестикутник і площина α розміщені так, що:

а) $AB \parallel \alpha$ і $BE \parallel \alpha$;
б) $BC \parallel \alpha$ і $AE \parallel \alpha$;
в) $AB \parallel \alpha$ і $FC \parallel \alpha$.

Чи будуть паралельними площина шестикутника і площина α?

397. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину ребра: а) A_1D_1; б) CC_1 проведено площину паралельно площині (AB_1D_1). Знайдіть периметр і площу утвореного перерізу, якщо $AB = a$.

398. Площини α і β перетинаються по прямій c. У площині α проведено пряму a, $a \parallel c$. Укажіть кілька способів побудови прямої b, $b \subset \beta$, $b \parallel a$.

§ 11 МЕТОДИ ПОБУДОВИ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

Раніше ви вже будували перерізи многогранників площиною. Виконували їх, використовуючи аксіоми стереометрії та теореми про паралельність прямих і площин. Існують й інші методи побудови перерізів. Найефективнішими є такі три методи: 1) метод слідів; 2) метод внутрішнього проектування; 3) комбінований метод.

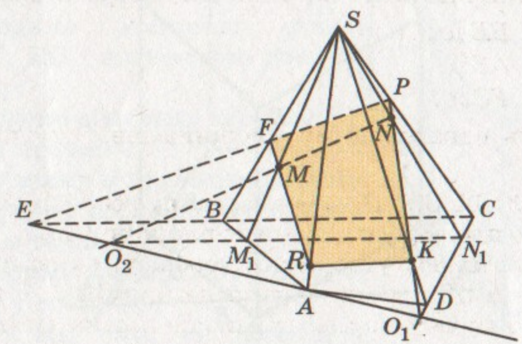
З методом слідів ви ознайомилися в § 5. Нагадаємо, що пряма, по якій січна площина перетинає площину α, називається *слідом* січної площини в площині α. Точка, в якій січна площина перетинає пряму, – слід січної площини на цій прямій.

Якщо многогранником, переріз якого будується, є призма, то найчастіше використовуємо паралельне проектування на площину основи. При цьому його напрям визначається бічним ребром призми. Якщо ж многогранником є піраміда, то використовується центральне проектування на площину основи. Центром проектування є вершина піраміди, в якій сходяться всі бічні ребра.

Розглянемо кілька прикладів.

ЗАДАЧА 1. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через точки M, N, K (мал. 149).

Побудуємо слід січної площини у площині основи. Для цього спроектуємо точки M, N, K на площину основи з точки S. Отримаємо точки M_1, N_1, а проекція точки K збіжиться з точкою D. Знайдемо дві точки сліду, побудувавши точки O_1 $(NK \cap N_1D = O_1)$ і O_2 $(MN \cap M_1N_1 = O_2)$. Отже, пряма O_1O_2 – слід



Мал. 149

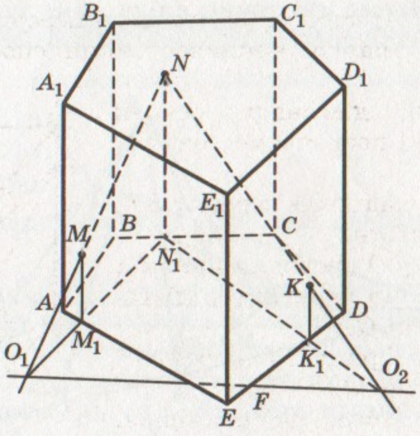
січної площини у площині основи. Тепер можемо побудувати шуканий переріз. Нехай $BC \cap O_1O_2 = E$, а $NK \cap SC = P$. Провівши пряму EP, отримаємо відрізок PF, по якому січна площина перетинає грань BSC. Далі, якщо $FM \cap AS = R$, проведемо відрізки FR і RK. Чотирикутник $RFPK$ – шуканий переріз.

ЗАДАЧА 2. **Побудуйте переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через точки M, N, K (мал. 150).**

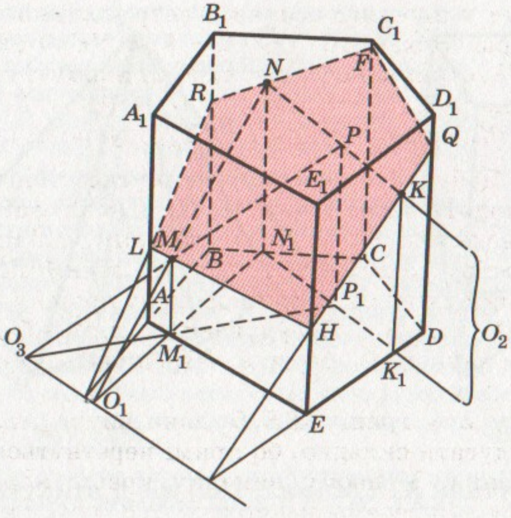
Спроектуємо точки M, N, K на площину основи паралельно бічному ребру призми. Отримаємо точки M_1, N_1, K_1. Побудуємо точки сліду як точки перетину прямих MN і M_1N_1 та прямих NK і N_1K_1. Побудувавши слід O_1O_2, зможемо побудувати і шуканий переріз. Пропонуємо зробити це самостійно.

Якщо точку K у грані DEE_1D_1 дано вище (мал. 151), то точку O_2 побудувати складно, бо прямі перетнуться далеко за межами малюнка. У цьому випадку краще користуватися іншим методом. Виберемо на прямій NK довільну точку P. Тоді $P \in (MNK)$, а значить, точки M, N, P визначають ту саму площину, що і точки M, N, K. Тепер побудуємо слід площини (MNP). Для цього спочатку на прямій N_1K_1 побудуємо точку P_1, яка є паралельною проекцією точки P (напрям проектування не змінюється – паралельний бічному ребру призми). Знайдемо точку O_3 – точку перетину прямих PM і P_1M_1. Отримали пряму O_1O_3 – слід січної площини. Зробивши відповідні побудови, отримаємо шуканий переріз – п'ятикутник $LRFQH$.

Метод внутрішнього проектування. **Цей метод універсальний і має деякі переваги над методом слідів, особливо**



Мал. 150



Мал. 151

коли слід січної площини знаходиться далеко за межами малюнка (як це було у задачі 2).

ЗАДАЧА 3. **Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, P, T (мал. 152).**

Нехай $KPTM$ – переріз, який треба побудувати. Одну з його діагоналей KT можна побудувати, оскільки дано точки K і T. Задача зводиться до побудови другої діагоналі. Проекції обох цих діагоналей побудувати неважко, оскільки вони є діагоналями основи призми. Встановимо відповідність: діагоналі перерізу KT відповідає проекція BD; діагоналі перерізу PM – проекція CA; перетину діагоналей перерізу O_1 – точка O.

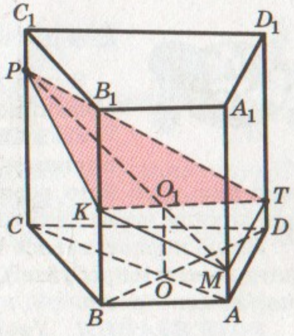
З описаного аналізу випливає такий спосіб розв'язання задачі:

1) проводимо діагоналі основи призми AC, BD і позначаємо точку O їх перетину;

2) проводимо діагональ перерізу KT, яку можна провести;

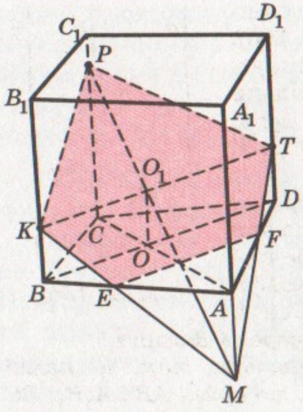
3) через точку O проводимо пряму, паралельну AA_1 до перетину з діагоналлю KT в точці O_1;

4) проводимо пряму PO_1 до перетину з AA_1 у точці M.

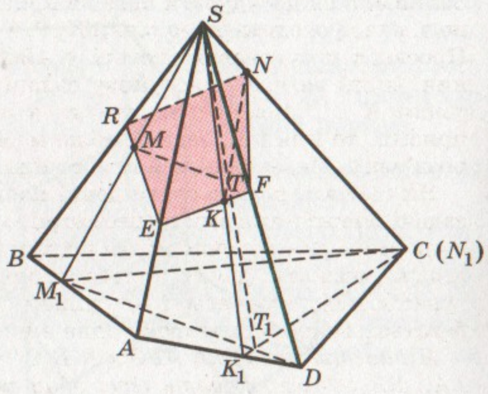


Мал. 152

Залежно від того, як розміщені дані точки K, P і T, у перерізі може



Мал. 153



Мал. 154

бути чотирикутник $KPTM$ (мал. 152) або п'ятикутник $KPTFE$ (мал. 153).

Будувати переріз піраміди методом внутрішнього проектування можна аналогічно, тільки користуватися слід центральним проектуванням.

ЗАДАЧА 4. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки M, N, K.

Спроектуємо точки M, N, K з вершини S на площину $ABCD$. Отримаємо точки M_1, K_1, а точка N_1 збіжиться з точкою C (мал. 154).

Якщо $DM_1 \cap CK_1 = T_1$, а $ST_1 \cap NK = T$, $MT \cap SD = F$, то визначаємо точки E і R, в яких січна площина перетинає ребра SA і SB.

$FK \cap SA = E$, $EM \cap SB = R$.

Провівши відрізки RN і NF, матимемо шуканий переріз $ERNF$.

Для допитливих

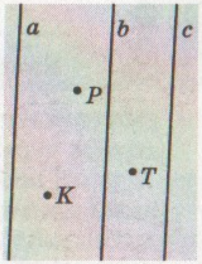
З побудовами перерізів многогранників тісно пов'язані деякі планіметричні задачі на побудову.

ЗАДАЧА 5. Дано три паралельні прямі однієї площини і три точки між ними. Побудуйте трикутник так, щоб його вершини лежали на даних прямих, а сторони проходили через дані точки (мал. 155).

Якщо користуватися тільки методами планіметрії, задачу розв'язати важко (спробуйте!). Методами стереометрії вона розв'язується порівняно просто.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Уявімо, що відрізки даних прямих — ребра трикутної призми, а точки K, P, T лежать на її бічних гранях.

Залишається побудувати переріз призми площиною, яка проходить через точки K, P, T (мал. 156). Проекція побудованого перерізу ABC — трикутник, який задовольняє умову задачі. Оскільки точки K і P можна уявляти то в одній грані призми, то в іншій, задача може мати два різні розв'язки. Переконайтеся самостійно.

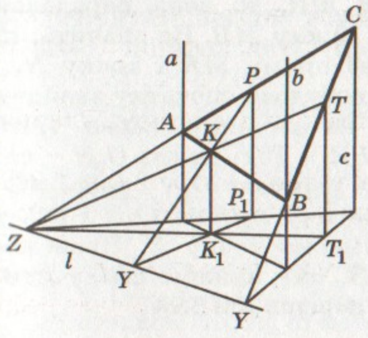


Мал. 155

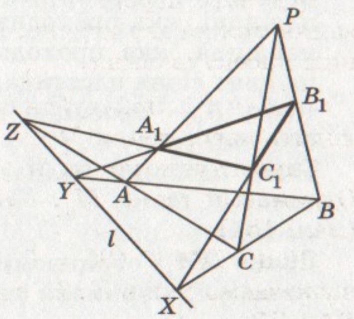
Як бачимо, розв'язувати деякі планіметричні задачі можна методами стереометрії, «вийшовши в простір». Іноді зручно моделлю планіметричної задачі вважати деяку стереометричну конфігурацію. Це стосується не тільки задач, а й багатьох важливих теорем. Одна з них — теорема Дезарга.

Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розташовані так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 проходять через одну точку, то прямі AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, CA і C_1A_1 перетинаються в точках, що лежать на одній прямій, або паралельні.

Спробуйте довести теорему, користуючись малюнком 157. Покажіть на малюнку випадок, коли $XY \parallel AC \parallel A_1C_1$.



Мал. 156



Мал. 157

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

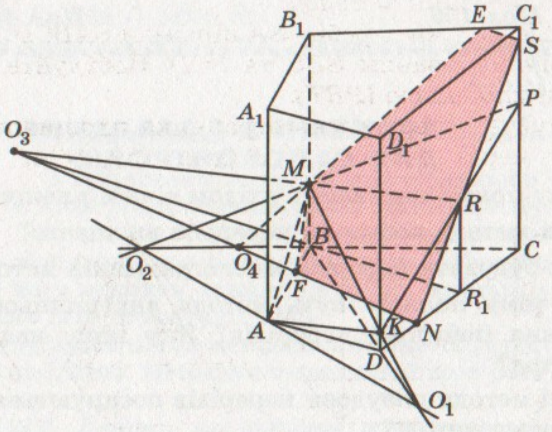
1. Яку пряму називають слідом січної площини?
2. Які методи побудови перерізів ви знаєте?
3. Як будувати перерізи многогранників методом слідів?
4. У чому полягає суть методу внутрішнього проектування побудови перерізів? Яку іншу назву має цей метод?
5. Які методи побудови перерізів поєднуються в комбінованому методі?

Виконаємо разом

Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N паралельно прямій AK (мал. 158).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Побудуємо допоміжний переріз призми, який проходить через пряму AK і точку M. Для цього побудуємо слід допоміжної площини в площині основи. Одна точка сліду – точка A, оскільки вона лежить і в площині перерізу, і в площині основи. Другу точку сліду – точку O_1 – побудуємо як точку перетину прямої MK з прямою BD, яка є проекцією прямої MK на площину основи. Отже, AO_1 – слід січної площини. Тоді можемо побудувати точку O_2 – точку перетину BC і AO_1. Провівши пряму O_2M, отримаємо точку P ($P \in CC_1$), яку можемо сполучити з точкою K. Чотирикутник $AMPK$ – шуканий допоміжний переріз.

У площині $AMPK$ проведемо пряму $MR \parallel AK$. Оскільки пряма AK паралельна прямій MR, то вона паралельна площині, яка проходить через пряму MR. Це значить, що площина, яка проходить через пряму MR і точку N, – шукана січна площина. Для її побудови спочатку знайдемо точку R_1 – проекцію точки R на площину основи. Потім будуємо точку O_3 ($O_3 = MR \cap BR_1$). Тоді пряма O_3N – слід січної площини. Знайдемо точку перетину O_3N і ребра AB – точку F. Якщо O_4 – точка перетину прямих O_3N і BC, то проведемо пряму O_4M і отримаємо точку E. Проведемо пряму NR і отримаємо точку S, яку можемо сполучити з точкою E. Отримали шуканий переріз $FMESN$.



Мал. 158

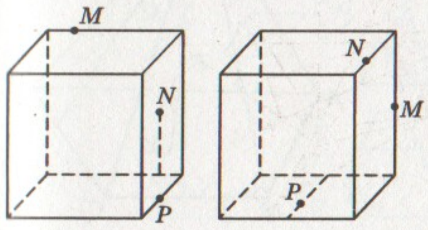
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

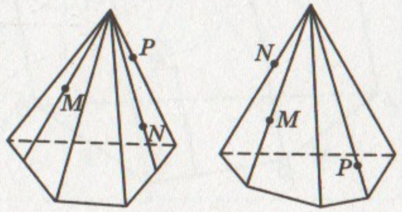
399. Чи може п'ятикутник бути перерізом шестикутної призми? А семикутник?
400. Чи може правильний п'ятикутник бути перерізом паралелепіпеда?
401. Яку кількість сторін може мати многокутник, отриманий у перерізі чотирикутної піраміди площиною?

А

402. Побудуйте переріз чотирикутної похилої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через три точки, що лежать на ребрах BB_1, CC_1, AD.
403. Побудуйте переріз п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ площиною, яка проходить через точки, що лежать на ребрах AA_1, CC_1, EE_1.
404. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди $SABCDE$ площиною, що проходить через точки M, N, P, якщо $M \in SA$, $N \in SC$, $P \in (DSE)$.
405. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною MNR, якщо $M \in CC_1$, $N \in DD_1$, $R \in A_1B_1$. Задачу розв'яжіть: а) методом слідів; б) методом внутрішнього проектування; в) комбінованим методом.
406. Побудуйте переріз похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, N, якщо $K \in (CC_1D_1)$, $L \in (AA_1D_1)$, $N \in BB_1$. Задачу розв'яжіть: а) методом слідів; б) методом внутрішнього проектування; в) комбінованим методом.
407. Точка R належить ребру SA піраміди $SABCD$, а точки P і T – бічним граням SBC та SCD. Побудуйте переріз піраміди площиною (PRT).
408. Побудуйте перерізи многогранника площиною, яка проходить через точки M, N, P (мал. 159, 160).



Мал. 159



Мал. 160

Б

409. Побудуйте переріз піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки P і Q, які лежать у площинах (ASB) і (ABC), та внутрішню точку R ребра SE.

410. Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, M, якщо вони лежать відповідно в гранях AA_1B_1B, AA_1D_1D, CC_1D_1D.

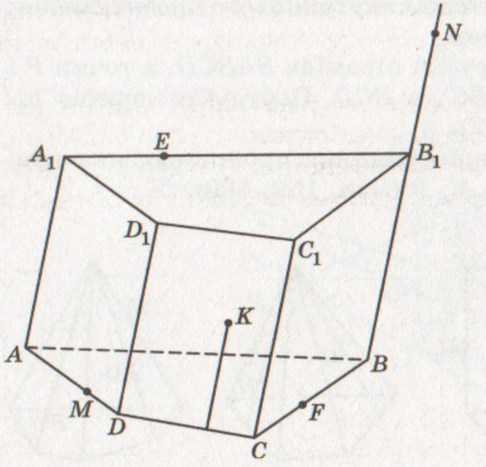
411. Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки E, F, T, якщо $E \in AC_1$, $F \in B_1D$, $T \in C_1D_1$.

412. На ребрах AC, SB і SC піраміди $SABC$ задано точки M, N, K. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через пряму MN, паралельно прямій BK.

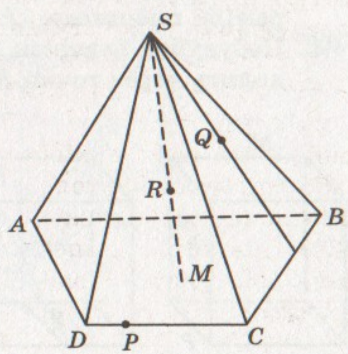
413*. На ребрах BB_1, EE_1 і на продовженні ребра CC_1 призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ задано точки M_1, N_1, P_1 відповідно, а на ребрах AA_1, BB_1 і CC_1 – точки M_2, N_2, P_2. Побудуйте: переріз призми площиною, що проходить через точки: а) M_1, N_1, P_1; б) M_2, N_2, P_2; в) лінію перетину площин $(M_1N_1P_1)$ і $(M_2N_2P_2)$.

414*. На ребрі AD, на продовженні ребра BB_1 і в площині грані CC_1D_1D призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано відповідно точки M, N, K. Побудуйте переріз призми площиною (MNK) і знайдіть точку перетину цієї площини з прямою EF, якщо $E \in A_1B_1$, $F \in BC$ (мал. 161).

415. Побудуйте переріз піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через точки P, Q, R, якщо $Q \in (SBC)$, $P \in CD$, $R \in SM$, де M – точка з площини $ABCD$ (мал. 162).



Мал. 161



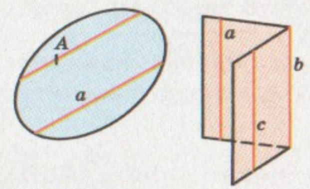
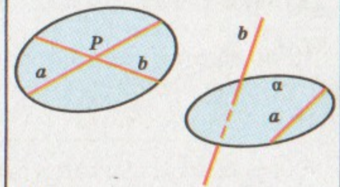
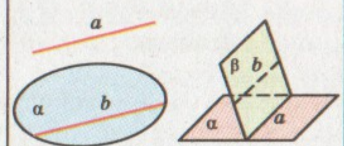
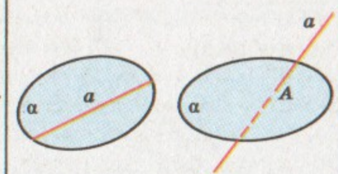
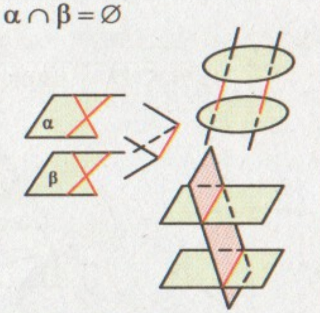
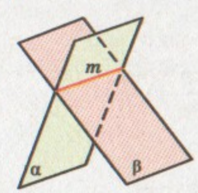
Мал. 162

Вправи для повторення

416. Кожні дві з трьох прямих перетинаються, але не лежать в одній площині. Як розташовані дані прямі? Виконайте малюнок.

417. Побудуйте зображення прямокутного рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, і точки перетину з колом прямих, які проходять через середину гіпотенузи, перпендикулярно до катетів.

418. Користуючись наведеною нижче таблицею, підготуйте розповідь про різні види розташування прямих і площин у просторі.

Відношення	паралельні	не паралельні
Пряма і пряма	$a \parallel b$, $b \parallel c$  O, T_4, T_5	*Пересічні* *Мимобіжні*  T_3
Пряма і площина	$a \cap \alpha = \varnothing$  O, T_6, T_7	$a \subset \alpha$ $a \cap \alpha = A$  O
Площина і площина	$\alpha \cap \beta = \varnothing$  O, T_8, T_9, T_{10}	$\alpha \cap \beta = m$ 

Тут O – означення, T – теорема.

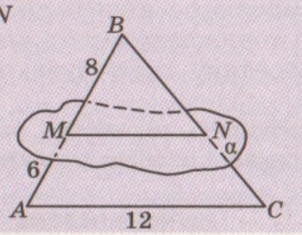
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

1

А

$AC \parallel \alpha$

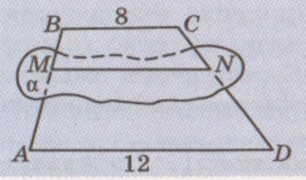
MN



Б

$BM : MA = 1:3$,
$BC \parallel \alpha$, $ABCD$ – трапеція

MN

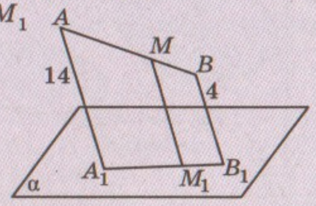


2

А

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$;
$AM : MB = 3:2$

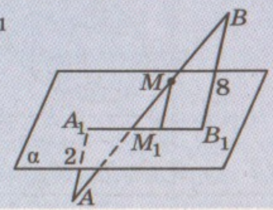
MM_1



Б

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$;
$AM : MB = 3:1$

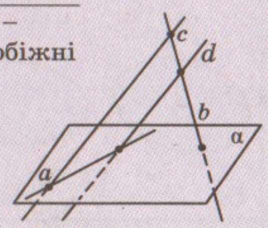
MM_1



3

А

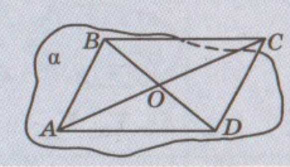
c і d –
мимобіжні



Б

$A \in \alpha$; $B \in \alpha$; $O \in \alpha$

Довести: $CD \subset \alpha$

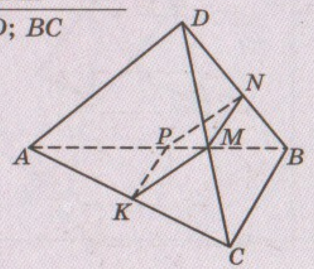


4

А

M, N, K, P – середини ребер;
$NP - MN = 3$
$P_{MNKP} = 26$

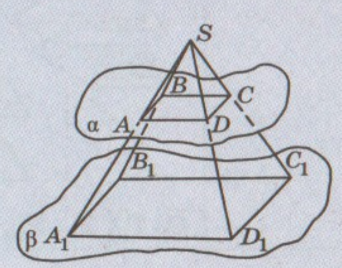
AD; BC



Б

$\alpha \parallel \beta$; $ABCD$ – паралелограм

$A_1B_1C_1D_1$ – паралелограм

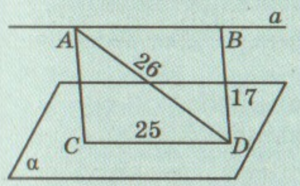


5

А

$a \parallel \alpha$; $AC \parallel BD$

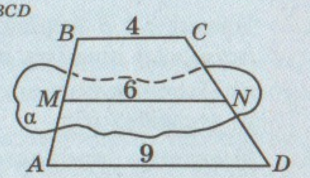
P_{ABDC}; S_{ABDC}



Б

$ABCD$ – трапеція; $AD \parallel \alpha$;
$S_{AMND} = 54$ см^2

S_{ABCD}

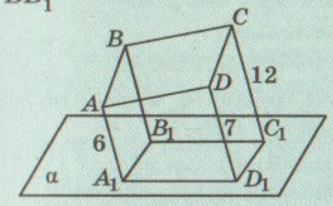


6

А

$ABCD$ – паралелограм;
$DD_1 = 7$ см;
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$

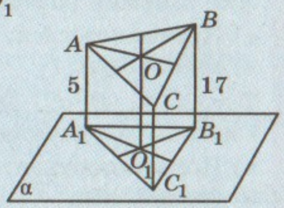
BB_1



Б

$AC \parallel \alpha$; O – точка перетину медіан;
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel OO_1$

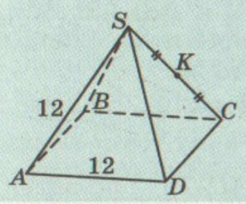
OO_1



Знайдіть площу перерізу правильної піраміди площиною, що проходить через AB і точку K.

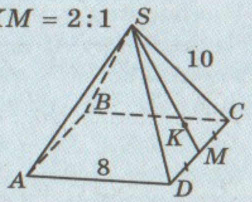
7

А



Б

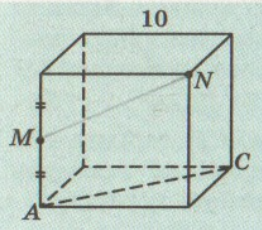
$SK : KM = 2:1$



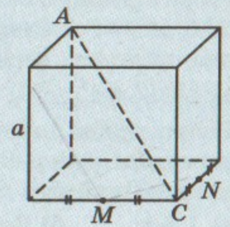
Знайдіть периметр перерізу куба площиною, яка паралельна AC і проходить через задані точки M і N.

8

А



Б



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. AB і CD – основи трапеції $ABCD$. Пряма простору a паралельна AB. Яке взаємне розташування прямих a і CD?
а) Перетинаються; б) паралельні;
в) мимобіжні; г) не можна встановити.

2. Прямі a і b паралельні площині α. Яке взаємне розташування прямих a і b?
а) Перетинаються; б) паралельні;
в) мимобіжні; г) усі відповіді а)–в).

3. Площина проходить через пряму, паралельну іншій площині. Як розташовані ці площини?
а) Перетинаються; б) паралельні;
в) перетинаються або паралельні; г) збігаються.

4. Точка M не лежить у площині прямокутника $ABCD$. Яке взаємне розташування прямих MA і BD?
а) Перетинаються; б) паралельні;
в) мимобіжні; г) не можна встановити.

5. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Яке взаємне розташування прямих AC і BD?
а) Перетинаються; б) паралельні;
в) мимобіжні; г) не можна встановити.

6. Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує різних площин, які проходять через a паралельно b?
а) Одна; б) жодної; в) безліч; г) жодної або безліч.

7. У трикутнику ABC $AC = 8$ см, $M \in AB$, $AM:MB = 1:3$. Через точку M паралельно AC проведено площину, яка перетинає BC у точці P. Знайдіть MP.
а) 24 см; б) 2,6 см; в) 6 см; г) 4 см.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $M \in AB$. Через точку M проведено площину, паралельну площині BB_1D_1D. У якому відношенні точка M ділить AB, якщо в перерізі утворився квадрат?
а) $1:2$; б) $1:\sqrt{2}$;
в) $1:(\sqrt{2}-1)$; г) перерізом квадрат бути не може.

9. Ребро правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює 24 см, $M \in BD$, $BM:MD = 3:1$. Знайдіть площу перерізу тетраедра площиною, яка проходить через точку M паралельно площині (ABC).
а) $16\sqrt{3}$ см^2; б) $9\sqrt{3}$ см^2; в) $81\sqrt{3}$ см^2; г) $36\sqrt{3}$ см^2.

10. Ребро правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює a. Через середини ребер BD і CD паралельно AD проведено площину. Знайдіть периметр утвореного перерізу.
а) $1{,}5a$; б) $3a$; в) $2a$; г) $4a$.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Площини α і β паралельні. Прямі SA, SB, SC перетинають площину α в точках A, B, C, а площину β – у точках A_1, B_1, C_1. M і M_1 – середини відрізків BC і B_1C_1. Знайдіть A_1M_1, якщо $AM = 6$ см і $SA:AA_1 = 3:2$.

2. Чи можуть перетинатися діагоналі просторового чотирикутника, не всі вершини якого лежать в одній площині?

3. Побудуйте зображення перпендикулярів, проведених з центра кола, описаного навколо трапеції, до її сторін, якщо діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони.

4. Точки M, N, P, K – середини ребер AD, BD, BC, AC тетраедра $ABCD$. Знайдіть довжини ребер AB і CD, якщо $MP = NK = 10$ см і $\angle KMP = 60°$. Доведіть, що $DC \parallel (MNK)$.

5. Площина α перетинає сторону AB трикутника ABC в її середині і паралельна стороні AC. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо площа чотирикутника, який відтинає від трикутника площина α, дорівнює 24 см^2.

6. $ABCD$ – правильний тетраедр, O – центр вписаного в трикутник ABC кола. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку O і паралельна BC і AD. У якому відношенні ця площина ділить відрізок EF, якщо E і F – середини ребер AD і BC?

7. Точки M і N лежать відповідно на ребрах AB і CD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин (AA_1N) і (DD_1M). Доведіть, що вона паралельна AA_1.

8. У чотирикутній піраміді $SABCD$ O_1 і O_2 – точки перетину медіан граней SAD і SDC. Чи паралельна пряма O_1O_2 площині (SAC)?

9. У просторі проведено три прямі, які не лежать в одній площині і при цьому жодні дві з них не мимобіжні. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку або паралельні.

10. Усі ребра чотирикутної піраміди $SABCD$ дорівнюють по 12 см. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середину ребра SC паралельно площині (ASM), де M – середина CD. Знайдіть периметр утвореного перерізу.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3

1 Якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, кажуть, що вони перетинаються. Іноді їх називають *пересічними* прямими.

2 Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними. Дві прямі називають *мимобіжними*, якщо вони не лежать в одній площині. Якщо одна з двох прямих, які не перетинаються, лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину, то такі прямі мимобіжні (ознака мимобіжності прямих).

3 Дві прямі простору, які лежать в одній площині і не перетинаються, називають *паралельними прямими*. Два промені або відрізки, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називають паралельними.

4 Відношення паралельності прямих рефлексивне ($a \parallel a$), симетричне (якщо $a \parallel b$, то і $b \parallel a$) і транзитивне (якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$). Три або більше попарно паралельних прямих простору можуть не лежати в одній площині.

5 Через будь-яку точку простору можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій.

6 Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

7 *Пряма і площина називаються паралельними*, якщо вони не мають спільних точок. Якщо пряма a паралельна якій-небудь прямій площини α, але не лежить у цій площині, то $a \parallel \alpha$ (ознака паралельності прямої і площини).

8 *Дві площини називаються паралельними*, якщо вони не перетинаються. Паралельні площини або не мають спільних точок або суміщаються всіма своїми точками.

9 Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні (ознака паралельності площин).

10 Якщо одну з паралельних площин перетинає яка-небудь пряма або площина, то вона перетинає й другу площину. Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих. Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.

11 При паралельному проектуванні відрізки, не паралельні проектуючій прямій, зображаються відрізками; паралельні відрізки – паралельними відрізками, при цьому відношення їх довжин зберігається.

12 *Зображенням фігури* називають фігуру, подібну проекції даної фігури на деяку площину.

Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Основні теми розділу:

- Перпендикулярність прямих у просторі.
- Перпендикулярність прямої та площини.
- Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри.
- Перпендикулярність площин.
- Ортогональне проектування.
- Відстані в просторі.
- Кути в просторі.

РОЗДІЛ 4

Головне значення перпендикуляра – це його роль у техніці і в усьому нашому вжитку.

О.Д. Александров

§ 12 КУТ МІЖ ПРЯМИМИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ

Щоб увести поняття *кута між прямими* у просторі, слід розглянути три випадки:
- прямі перетинаються;
- прямі паралельні;
- прямі мимобіжні.

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути. Кутова міра не найбільшого з них називається *кутом між даними прямими, що перетинаються*. Кут між прямими, що перетинаються, не перевищує 90°.

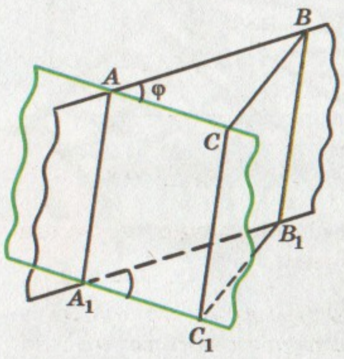
Позначають кут між прямими a і b символом $\angle(ab)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Кут між прямими – не фігура, а кутова міра, величина.

Теорема 14. ***Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі AB і AC, що перетинаються, паралельні відповідно прямим A_1B_1 і A_1C_1. Доведемо, що кут між прямими AB і AC дорівнює куту між прямими A_1B_1 і A_1C_1 (мал. 163).

Розглянемо спочатку випадок, коли дані прямі лежать у різних площинах. Якщо $\angle BAC = \varphi$ – кут між прямими AB і AC ($\varphi \le 90°$), то через довільні точки B і C його сторін проведемо прямі BB_1 і CC_1, паралельні AA_1. Нехай прямі BB_1 і A_1B_1 перетинаються в точці B_1, а прямі CC_1 і A_1C_1 – у точці C_1. Чотирикутники AA_1B_1B і AA_1C_1C – паралелограми, оскільки їх протилежні сторони попарно паралельні. Відрізки BB_1 і CC_1 паралельні та рівні, оскільки кожний з них паралельний відрізку AA_1 і дорівнює йому. Отже, чотирикутник BB_1C_1C теж паралелограм, тому $CB = C_1B_1$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, тому $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \varphi$. Отже, кут між прямими A_1B_1 і A_1C_1 дорівнює куту між прямими AB і AC.

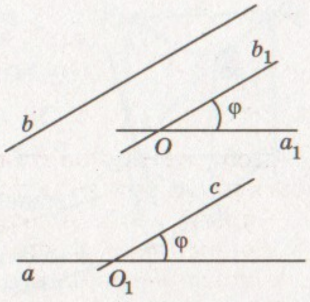


Мал. 163

У випадку, коли прямі AB, AC, A_1B_1 і A_1C_1 лежать в одній площині,

можна дослівно повторити наведені міркування. Тільки точку C треба брати поза прямою BB_1, щоб паралелограм BB_1C_1C не виродився у відрізок.

Якщо дві прямі паралельні, то вони не мають спільних точок, а тому кута, як геометричної фігури, не утворюють. Вважають, що кут між паралельними прямими дорівнює 0°.



Мал. 164

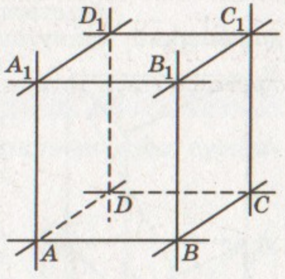
Тепер введемо поняття *кута між мимобіжними прямими.* Нехай a і b – довільні мимобіжні прямі. Через будь-яку точку O простору проведемо прямі, паралельні a і b (мал. 164). Кут φ між побудованими так прямими a_1 і b_1, які перетинаються, називають кутом між даними мимобіжними прямими: $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$. Цей кут не залежить від вибору точки O. Адже якщо через яку-небудь іншу точку простору провести прямі, паралельні прямим a і b, кут між ними теж дорівнює φ (теорема 14). Точку O можна брати і на будь-якій з даних прямих. Якщо $b \parallel c$, то завжди $\angle(ab) = \angle(ac)$; кожний з цих кутів дорівнює $\angle(a_1b_1)$.

***Кутом між мимобіжними прямими** називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні відповідно даним мимобіжним прямим.*

Кут між мимобіжними прямими, як і між прямими однієї площини, не може мати більше від 90°.

*Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.*

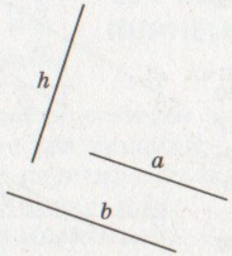
Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, то кожна з прямих AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 перпендикулярна до прямої AA_1 (мал. 165).



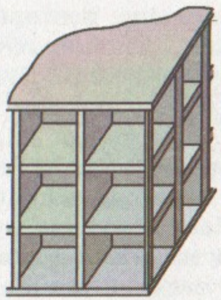
Мал. 165

Відрізки (промені) називають *перпендикулярними*, якщо вони належать перпендикулярним прямим.

Теорема 15. ***Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.***



Мал. 166



Мал. 167

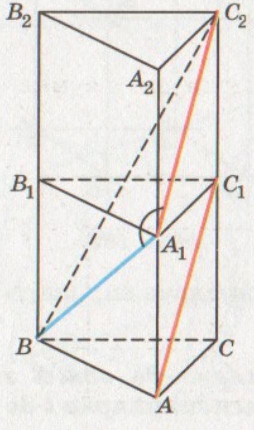
ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі a і b паралельні і $h \perp a$. Доведемо, що $h \perp b$ (мал. 166).

Якщо $b \parallel a$, то завжди $\angle(hb) = \angle(ha)$. У даному випадку $\angle(ha) = 90°$, тому і $\angle(hb) = 90°$, тобто $h \perp b$. Що й треба було довести.

Коли будують багатоповерховий будинок, то спочатку будують каркас, в якому кожна горизонтальна балка перпендикулярна до вертикальної колони (мал. 167). Під прямими кутами зварюють стальні прути в арматурі залізобетонних конструкцій, скріплюють суміжні деталі віконної рами тощо.

Для допитливих

Як визначити кут між двома мимобіжними прямими? Пізніше ви навчитеся робити це, користуючись векторним чи координатним методом. А в багатьох випадках це можна робити, утворивши допоміжний трикутник, дві сторони якого паралельні даним мимобіжним прямим.



Мал. 168

ЗАДАЧА. Усі ребра правильної трикутної призми рівні. Знайдіть косинус кута між мимобіжними прямими, яким належать діагоналі двох бічних граней цієї призми.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай усі ребра призми $ABCA_1B_1C_1$ рівні. Знайдемо кут між прямими AC_1 і BA_1 (мал. 168). На даній призмі побудуємо рівну їй призму $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ і розглянемо трикутник A_1BC_2. Оскільки $AC_1 \parallel A_1C_2$, то шуканий кут між прямими AC_1 і BA_1 дорівнює куту BA_1C_2 або суміжному з ним.

Нехай довжина ребра даної призми дорівнює 1. Тоді $BA_1 = A_1C_2 = \sqrt{2}$. За теоремою Піфагора з $\triangle BCC_2$ знаходимо $BC_2 = \sqrt{5}$.

За теоремою косинусів

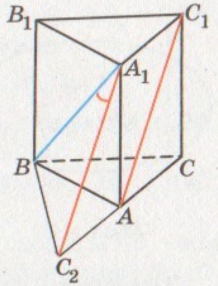
$$BC_2^2 = A_1B^2 + A_1C_2^2 - 2A_1B \cdot A_1C_2 \cdot \cos\varphi,$$
$$5 = 2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\varphi.$$

Звідси $4\cos\varphi = -1$, $\cos\varphi = -0{,}25$.

Кут φ тупий, тому кут між прямими AC_1 і BA_1 дорівнює $180° - \varphi$. А $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi = 0{,}25$.

Отже, косинус шуканого кута дорівнює 0,25.

Спробуйте розв'язати задачу іншим способом (мал. 169). Оскільки $C_2A_1 \parallel AC_1$, то треба знайти косинус кута BA_1C_2.



Мал. 169

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

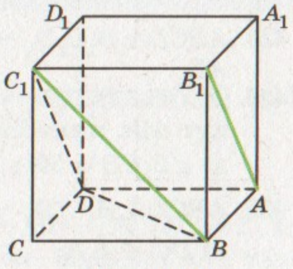
1. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
2. Що називають кутом між двома мимобіжними прямими?
3. Чи може кут між прямими бути тупим або розгорнутим?
4. Які дві прямі простору називають перпендикулярними?
5. Які відрізки або промені називають перпендикулярними?
6. Чому дорівнює кут між паралельними прямими? А між перпендикулярними прямими?

Виконаємо разом

1. Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

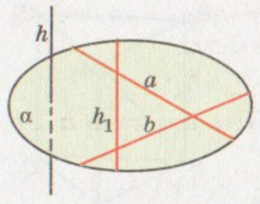
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знайдемо кут між діагоналями AB_1 і BC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 170). Оскільки $DC_1 \parallel AB_1$, то кут між прямими AB_1 і BC_1 дорівнює куту BC_1D. $\angle BC_1D = 60°$, оскільки $\triangle BC_1D$ рівносторонній.

Відповідь. 60°.



Мал. 170

2. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перетинає площину, що проходить через них.



Мал. 171

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Припустимо, що пряма h, перпендикулярна до двох прямих a і b, які перетинаються, не перетинає площину α, що проходить через них (мал. 171). Тоді $h \parallel \alpha$ або $h \subset \alpha$. В обох випадках у площині α знайдеться пряма h_1, паралельна h. І якщо пряма h перпендикулярна до прямих a і b, то паралельна їй пряма h_1 теж перпендикулярна до цих прямих. Прийшли до суперечності, оскільки пряма, яка лежить у площині, не може бути перпендикулярною до двох прямих цієї площини, що перетинаються. Отже, пряма h перетинає площину α.

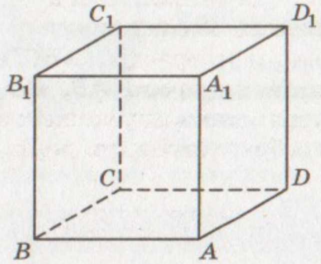
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

419. Кут між прямими – це фігура чи величина?

420. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану на цій прямій точку? А через точку, яка не лежить на даній прямій?

421. Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки прямих, перпендикулярних до прямої a, можна провести у площині α?



Мал. 172

422. З планіметрії відомо: дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Чи правильне це твердження для стереометрії?

423. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 172). Знайдіть кут між прямими:
а) DC і BC; б) AB і BB_1;
в) AA_1 і D_1C; г) AA_1 і D_1C_1;
ґ) A_1C_1 і AC; д) AB і B_1D_1.

А

424. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими AB_1 і AD_1.

425. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Знайдіть кут між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C, якщо:
а) $\angle B_1CB = 50°$; б) $BC = a$, $BC_1 = 2a$.

426. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими:
а) DC_1 і A_1B; б) A_1C і AB;
в) B_1D_1 і C_1C; г) B_1D і AC.

427. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AA_1 = 2AB$, $ABCD$ – квадрат. Знайдіть кут між прямими:
а) B_1C і AD; б) AB_1 і CD_1; в) AB_1 і A_1C_1.

428. Дано чотири прямі: $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведіть, що коли $a \perp b$, то $a_1 \perp b_1$.

429. Чи можуть бути перпендикулярними прямі OB і OC, якщо $\angle AOB = \angle AOC = 60°$?

430. Прямі a і b перетинаються під кутом 30°, а прямі a і c – під кутом 40°. Чи можуть бути перпендикулярними прямі b і c?

431. Чи існує замкнена неплоска ламана з п'яти ланок, кожна ланка якої перпендикулярна до суміжної?

432. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що $AB_1 \perp CD_1$.

433. A, B, C – точки на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $OA = OB = OC$.

434. Промені OA, OB, OC попарно перпендикулярні. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо: а) $OA = OB = OC = 4$ см; б) $OA = OB = OC = a$; в) $OA = OB = 3$ дм, $OC = 4$ дм.

435. Дано тетраедр $ABCD$, в якому $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, M – середина AB, N – середина CD і $MN = 5$ см. Знайдіть кут між BD і AC.

436. Доведіть, що діагоналі протилежних граней куба або паралельні, або перпендикулярні. Чи виконується це твердження для прямокутного паралелепіпеда?

437. M – середина ребра AD правильного тетраедра $ABCD$. Опустіть перпендикуляри з точки M на прямі AB, BD, BC, AK, де K – середина BD. Знайдіть довжину кожного перпендикуляра, якщо довжина ребра тетраедра дорівнює a.

Б

438. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною a. Його бічне ребро дорівнює $a\sqrt{3}$. Знайдіть кут між прямими:
а) AB_1 і D_1C; б) AB_1 і A_1C_1;
в) A_1C і BD; г) AB_1 і A_1D_1.

439. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, O – точка перетину діагоналей AC і BD. Знайдіть кут між прямими:
а) OB_1 і DD_1; б) OB_1 і A_1C_1;
в) B_1O і BD_1; г) B_1O і BC.

440. $ABCD$ – тетраедр, $M \in AC$, $N \in BD$, $AM : MC = DN : NB = 2 : 1$, $BC = 10{,}5$ см, $AD = 24$ см, $MN = 13$ см. Знайдіть кут між AD і BC.

441. У правильному тетраедрі $ABCD$ $CM = MB$ ($M \in CB$). Знайдіть кут між прямими AM і BD.

442. $ABCD$ – тетраедр, у якого $DA = DB = DC$, $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Знайдіть кут між прямими DM і AB, якщо M – середина BC.

443. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, K – середини ребер A_1B_1, B_1C_1, AA_1 відповідно, O – точка перетину діагоналей грані DD_1C_1C. Знайдіть кут між прямими:
а) MC_1 і KO;
б) C_1K і OM;
в) OA_1 і MN.

444. Кут між мимобіжними діагоналями суміжних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнює α. Знайдіть кут між діагоналями цих граней, які виходять з однієї вершини.

445. K і P – середини ребер AB і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Опустіть перпендикуляр з вершини A_1 на прямі BD, AD_1, KP, C_1D, KD_1. Знайдіть довжину кожного перпендикуляра, якщо $AB = a$.

446. Точки K і M – середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$. Доведіть, що $KM \perp AB$ і $KM \perp CD$. Знайдіть довжину KM, якщо $AB = a$.

447. Три стержні з'єднані зварюванням своїми серединами один до одного так, що кожний перпендикулярний до двох інших. Чи можна такого «їжака» протягти через люк, діаметр якого 1,8 м, якщо довжина і товщина кожного стержня дорівнюють відповідно 2 м і 0,1 м?

448. Усі грані паралелепіпеда – ромби з кутом 60°. Знайдіть кут між мимобіжними меншими діагоналями двох його суміжних граней.

449*. Знайдіть косинус кута між медіанами двох граней правильного тетраедра. Розгляньте всі можливі випадки.

Вправи для повторення

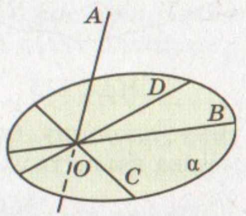
450. Через точку M проведіть пряму, паралельну кожній з двох площин, що перетинаються.

451. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через внутрішню точку грані (ACD) паралельно прямим AB і CD.

452. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 16 см.

§ 13 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Якщо пряма не лежить у площині і не паралельна їй, вона перетинає площину. Нехай пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD, ... лежать у площині α (мал. 173). Кути AOB, AOC, AOD, ... можуть бути різними. Заслуговує на увагу випадок, коли всі вони прямі. У такому разі кажуть, що пряма AO *перпендикулярна до площини* α. Пишуть: $AO \perp \alpha$, або $\alpha \perp AO$.

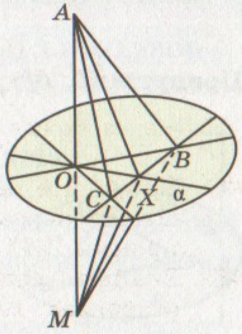


Мал. 173

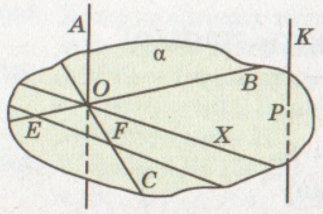
Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині і проходить через точку перетину.

Теорема 16 (ознака перпендикулярності прямої і площини). ***Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай пряма AO, яка перетинає площину α в точці O, перпендикулярна до прямих OB і OC цієї площини (мал. 174). Доведемо, що пряма AO перпендикулярна до будь-якої прямої OX, яка лежить у площині α. Для цього проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OC і OX у точках B, C і X. А на прямій OA по різні боки від O відкладемо рівні відрізки OA і OM. Сполучивши відрізками точки A і M з точками B, C, X, дістанемо кілька пар трикутників. Трикутники ABM і ACM рівнобедрені, оскільки їхні медіани BO, CO є і висотами. Отже, $AB = BM$ і $AC = CM$. Трикутники ABC і MBC рівні за трьома сторонами, тому $\angle ABC = \angle MBC$. Рівні також трикутники ABX і MBX – за двома сторонами і кутом між ними. Отже, $AX = MX$. Оскільки трикутник AXM рівнобедрений, то його медіана XO є і висотою, тобто $AO \perp XO$. Що й треба було довести.



Мал. 174



Мал. 175

Доведену теорему можна узагальнити. На основі теореми 15 пряму AO можна замінити будь-якою прямою KP, паралельною їй, а пряму OX – будь-якою прямою EF, що лежить у площині α і паралельна OX (мал. 175). Варто також врахувати, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, обов'язково перетинає площину, що проходить через них (задача 2, с. 123). Тому можна вважати доведеними такі твердження.

Пряма, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, перпендикулярна до площини, яка проходить через ці прямі.
Пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

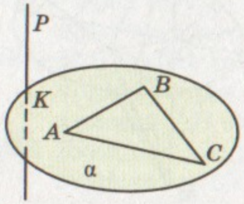
Наслідок. ***Якщо пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони*** (мал. 176).

Теорема 17. ***Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.***

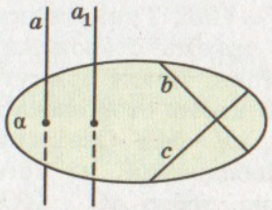
ДОВЕДЕННЯ. Нехай $a \parallel a_1$ і $a \perp \alpha$. Доведемо, що $a_1 \perp \alpha$ (мал. 177). Оскільки $a \perp \alpha$, то в площині α знайдуться прямі b і c, які перетинаються і перпендикулярні до a. Через те що b і c перпендикулярні до прямої a, то за теоремою 15 вони перпендикулярні і до прямої a_1, паралельної a. Отже, пряма a_1 перпендикулярна до прямих b і c площини α, що перетинаються, тобто $a_1 \perp \alpha$.

Теорема 18. ***Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.***

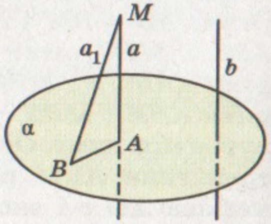
ДОВЕДЕННЯ. Нехай $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$. Доведемо, що $a \parallel b$ (мал. 178). Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді через яку-



Мал. 176



Мал. 177



Мал. 178

небудь точку M прямої a проведемо пряму a_1, паралельну b. Оскільки $b \perp \alpha$, то і $a_1 \perp \alpha$ (теорема 17). А за умовою $a \perp \alpha$. Якщо A і B – точки перетину прямих a і a_1 з площиною α, то з припущення випливає, що в $\triangle MAB$ два прямих кути. Цього не може бути. Тому прямі a і b паралельні.

Відрізок називається *перпендикулярним до площини*, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до даної площини.

Для допитливих

Деякі стереометричні твердження схожі на твердження планіметричні, тільки в них замість поняття «пряма» треба написати «площина».

Співставимо деякі планіметричні і стереометричні твердження.

У планіметрії	*У стереометрії*
1) Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.	1) Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.
2) Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.	2) Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної площини.

Подібних аналогій між твердженнями планіметрії і стереометрії можна навести багато. Корисно помічати їх. Науковці на такі аналогії звертають особливу увагу.

С. Банах: «Математик – це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями».

Й. Кеплер: «І я найбільше ціную Аналогії, моїх найвірніших учителів. Вони знають усі секрети Природи, і ними найменше треба нехтувати в Геометрії».

Спробуємо, міркуючи аналогічно, здогадатися, чим є в просторі геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка. Пригадаємо, що на площині таким ГМТ є серединний перпендикуляр даного відрізка. А у просторі?

Розглянувши кілька прикладів, можна здогадатися, що таким ГМТ є площина. Залишається довести, що це справді площина, і з'ясувати, як вона розміщена відносно даного відрізка (див. мал. 179).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
2. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Наведіть кілька властивостей відношення перпендикулярності прямих і площин.

4. Сформулюйте і доведіть властивість прямих, перпендикулярних до однієї площини.

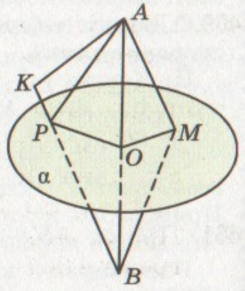
5. Яке слово пропущене в такому реченні:
а) Якщо один катет прямокутного трикутника перпендикулярний до площини, то другий катет ... до неї;
б) Якщо одна діагональ ромба перпендикулярна до площини, то друга ... до неї?

Виконаємо разом

1. Доведіть, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є площина, яка перпендикулярна до даного відрізка і проходить через його середину.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай площина α перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину O (мал. 179). Точка O рівновіддалена від A і B. Якщо M – будь-яка інша точка площини α, то $\triangle MOA = \triangle MOB$ (за двома катетами). Тому $MA = MB$. Як бачимо, кожна точка площини α рівновіддалена від кінців відрізка AB.

Якщо точка K не лежить у площині α, а розміщена, наприклад, з точкою B по різні боки від α, то відрізок KB перетинає площину α у такій точці P, що $PA = PB$. Тоді $BK = BP + PK = AP + PK > AK$. Виходить, $BK > AK$. Отже, тільки точки площини α рівновіддалені від кінців відрізка AB.

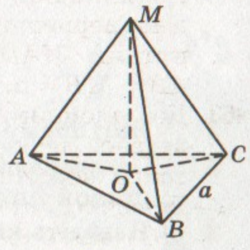


Мал. 179

2. Точка M знаходиться на відстані $a\sqrt{3}$ від кожної вершини рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини трикутника.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай MO – перпендикуляр до площини $\triangle ABC$ (мал. 180). $\triangle MOA = \triangle MOB = \triangle MOC$ за катетом і гіпотенузою, тоді $OA = OB = OC$. Значить, O – центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. Тоді $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. З $\triangle MOA$ за теоремою Піфагора $OM^2 = MA^2 - OA^2$.

$$OM^2 = 3a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{8a^2}{3},\ OM = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}.$$

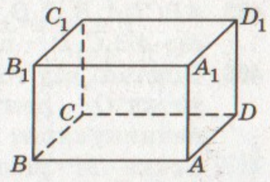


Мал. 180

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

453. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 181). Назвіть прямі, перпендикулярні до площини грані: а) BB_1C_1C; б) $A_1B_1C_1D_1$; в) ABB_1A_1.



Мал. 181

454. Пряма h перпендикулярна до прямих a і b площини α. Чи випливає з цього, що пряма h перпендикулярна до площини α?

455. Скільки площин, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку?

456. Скільки прямих, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану точку? А відрізків?

457. Пряма a перпендикулярна до площини α. Як розміщені відносно площини α прямі, перпендикулярні до прямої a?

458. Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до прямої a?

А

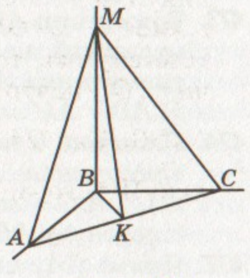
459. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середину його ребра перпендикулярно до цього ребра. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

460. Трикутник ABC – рівнобедрений, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Пряма MB перпендикулярна до AB і BC, K – середина AC (мал. 182). Доведіть, що $\triangle MBK$ і $\triangle MAK$ прямокутні. Знайдіть їхні площі, якщо $MB = 15$ см.

461. Пряма MO перпендикулярна до діагоналей паралелограма $ABCD$, які перетинаються в точці O. Встановіть вид трикутника MOK. Знайдіть MO і MK, якщо $K \in AB$, $OK = a$, $\angle OMK = \alpha$.

462. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MB. Яким є трикутник MAD? Знайдіть MD, якщо $AB = MB = a$.

463. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MB, O – точка перетину діагоналей квадрата. Доведіть, що $MO \perp AC$. Знайдіть MO, якщо $\triangle AMC$ – рівносторонній і $AB = a$.



Мал. 182

9*

464. Через вершину прямого кута C трикутника ABC з катетами 6 см і 8 см до його площини проведено перпендикуляр MC, $MC = 12$ см, CL – медіана даного трикутника. Знайдіть ML.

465. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що AB_1C_1D – прямокутник.

466. Відстані від точки M до всіх вершин квадрата однакові, точка O – центр квадрата. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини квадрата.

467. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини квадрата, якщо $AM = 10$ см, $AB = 6\sqrt{2}$ см.

468. O – центр кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, MO – перпендикуляр до площини прямокутника. Знайдіть відстані від точки M до вершин прямокутника, якщо $OM = a\sqrt{5}$, а довжина кола $4\pi a$.

469. Сторони прямокутника пропорційні числам 2 і 3, а його периметр 40 см. Точка P рівновіддалена від вершин прямокутника, $PA = 14$ см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки P до площини прямокутника.

470. Точка M рівновіддалена від вершин трикутника ABC, MO – перпендикуляр до площини трикутника, $O \in (ABC)$. Доведіть, що O – центр кола, описаного навколо трикутника.

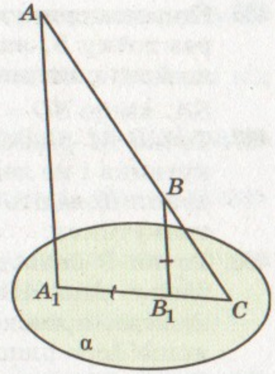
471. Точка M рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника ABC, $AB = a$, $AM = 2a$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини трикутника.

472. Точка S знаходиться на відстані 13 см від вершин трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки S до площини трикутника.

473. Трикутник ABC рівносторонній, а відрізок AM перпендикулярний до його площини. Знайдіть периметр і площу трикутника MBC, якщо: а) $AB = 3$ см, $AM = 4$ см; б) $AB = AM = c$.

474. Площина α перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC і ділить його у відношенні $AA_1 : A_1C = m : n$. У якому відношенні площина α ділить гіпотенузу AB?

475. Прямі AA_1 і BB_1, перпендикулярні до площини α, перетинають її у точках A_1 і B_1, а пряма AB – у точці C (мал. 183). Знайдіть відстань B_1C, якщо $AA_1 = 12$ см, $A_1B_1 = BB_1 = 3$ см.



Мал. 183

476. З кінців відрізка AB і точки M цього відрізка до площини α, яка не перетинає відрізок AB, проведено перпендикуляри AA_1, BB_1 і MM_1. Знайдіть MM_1, якщо $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см і: а) M – середина AB; б) $AM : MB = 1 : 3$.

477. З вершин паралелограма $ABCD$ на площину α, яка не перетинає паралелограм, опущено перпендикуляри AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Знайдіть DD_1, якщо:
а) $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 20$ см, $CC_1 = 13$ см;
б) $AA_1 = 15$ см, $BB_1 = 25$ см, $CC_1 = 13$ см.

Б

478. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини, яка проходить через точки B, B_1, D_1.

479. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$ площиною, яка перпендикулярна до ребра AB і проходить через його середину. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 12$ см.

480. Через вершину B тупого кута ромба $ABCD$ до площини ромба проведено перпендикуляр BM. Знайдіть MD, якщо різниця діагоналей ромба дорівнює 4 см, $AB = 10$ см, $AM = 2\sqrt{89}$ см.

481. MA – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$. Доведіть, що $MC \perp BD$.

482. O – центр квадрата $ABCD$, MO – перпендикуляр до його площини, K – середина DC. Доведіть, що $DC \perp (MOK)$. Знайдіть MO, якщо $MC = 2\sqrt{34}$ см, $MK = 10$ см.

483. AP – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, $K \in PC$. Доведіть, що $BD \perp AK$.

484. Через вершину A рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) до його площини проведено перпендикуляр PA. Знайдіть площу трикутника PCB, якщо $AB = 10$ см, $\angle PCA = 30°$.

485. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2. Через точку O перетину медіан трикутника до його площини проведено перпендикуляр MO, $MO = 8$ м. Доведіть, що точка M рівновіддалена від вершин трикутника і знайдіть цю відстань.

486. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 15 см і 17 см. Через точку S, яка рівновіддалена від вершин трикутника, до його площини проведено перпендикуляр SO. Знайдіть SA, якщо $SO = 2\sqrt{21}$ см.

487. Точка M рівновіддалена від вершин прямокутного трикутника і не лежить у його площині, F – середина гіпотенузи. Доведіть, що MF – перпендикуляр до площини трикутника.

488. Точка P знаходиться на відстані 26 см від усіх вершин трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки P до площини трикутника, якщо його площа 96 см^2, а різниця катетів 4 см.

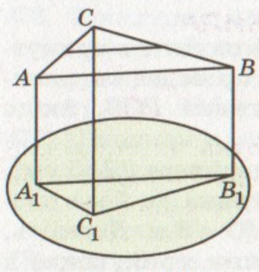
489. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки M до площини прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо бісектриса, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки пропорційні числам 24 і 7, а точка M знаходиться на відстані 12,5 см від усіх вершин трикутника.

490. Точка Q рівновіддалена від вершин трапеції з основами 4 см і 20 см та бічною стороною 10 см. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки Q до площини трапеції, дорівнює $5\sqrt{11}$ см. Знайдіть відстань від точки Q до вершин трапеції.

491. З кінців відрізка AB і точку $M(M \in AB)$ до площини α, яка перетинає відрізок AB, проведено перпендикуляри AA_1, BB_1, MM_1. Знайдіть MM_1, якщо $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 11$ см і: а) M – середина AB; б) $AM : MB = 3 : 1$.

492. Через вершини трикутника ABC ($\angle C = 90°$) до площини α, яка паралельна найбільшій середній лінії трикутника, проведено перпендикуляри AA_1, BB_1, CC_1 (мал. 184). Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $A_1B_1 = 4\sqrt{43}$ см, $B_1C_1 = 16$ см, $A_1C_1 = 12$ см.

493. BK – пряма, проведена перпендикулярно до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки K до вершин квадрата, якщо $AB = a$, $BK = b$.



Мал. 184

494. Доведіть, що дві площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні.

495. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до паралельних площин, паралельні. Чи можуть бути паралельними прямі, перпендикулярні до двох площин, які перетинаються?

496. Через дану точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної площини.

497. На даній прямій a знайдіть точки, однаково віддалені від даних точок A і B.

498. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від усіх вершин квадрата.

499. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від вершин трикутника.

500. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу і лежать у різних площинах. Доведіть, що $AC \perp BD$.

501. Точки A, B, C, D розміщені в просторі так, що $AB = BC$ і $CD = DA$. Доведіть, що $AC \perp BD$.

502*. $KABC$ і $PABC$ – правильні тетраедри. Доведіть що пряма KP перпендикулярна до площини трикутника ABC.

503. Точка O – центр грані ABC правильного тетраедра $PABC$. Доведіть, що пряма PO перпендикулярна до площини грані ABC.

504*. Периметр рівностороннього трикутника ABC дорівнює $2p$, а відрізки AA_1 і BB_1 перпендикулярні до площини цього трикутника. Знайдіть периметр, площу і косинуси кутів трикутника A_1B_1C, якщо ABB_1A_1 – квадрат.

Вправи для повторення

505. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M, N, K – середини ребер A_1B_1, B_1C_1, AA_1 відповідно. Знайдіть кут між прямими MN і AC, MN і BD, C_1K і AC, MK і AC.

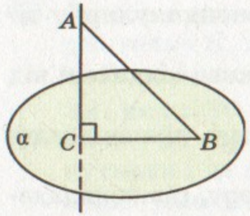
506. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції з діагоналлю d і гострим кутом α.

507. З точки P до прямої a проведено перпендикуляр PM і похилі $PA = 15$ см, $PB = 13$ см. Знайдіть PM, якщо різниця проекцій похилих дорівнює 4 см.

§ 14 ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА ДО ПЛОЩИНИ

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.

Наприклад, якщо пряма AC перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці C, то відрізок AC – перпендикуляр,



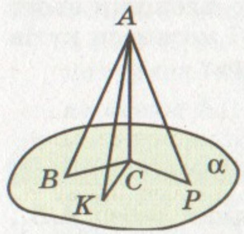
Мал. 185

опущений з точки A на площину α. Точка C – *основа перпендикуляра* (мал. 185).

Якщо AC – перпендикуляр до площини α, а B – відмінна від C точка цієї площини, то відрізок AB називають *похилою*, проведеною з точки A на площину α. Точка B – *основа похилої*, а відрізок CB – *проекція похилої AB* на площину α.

Зауважимо, що тут ідеться про *прямокутну проекцію похилої*. Такі проекції дістають за умови, що всі проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій.

! **Теорема 19.** ***Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведені до цієї площини перпендикуляр і похилі, то:***
1. Дві похилі, які мають рівні проекції, рівні.
2. З двох похилих та більша, проекція якої більша.
3. Перпендикуляр коротший за будь-яку похилу.



Мал. 186

ДОВЕДЕННЯ. Нехай AC – перпендикуляр, а AB, AK, AP – похилі до площини α (мал. 186).

1) Якщо $CB = CK$, то $\triangle ACB = \triangle ACK$ (за двома катетами). Тому $AB = AK$.

2) З прямокутних трикутників ACB і ACP маємо:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} \text{ і } AP = \sqrt{AC^2 + CP^2}.$$

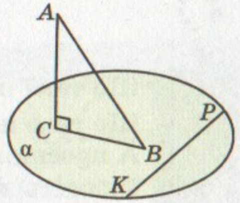
Отже, якщо $CB < CP$, то $AB < AP$.

3) Перпендикуляр AC – катет, а будь-яка похила AB – гіпотенуза трикутника ABC. Тому $AC < AB$. Теорему доведено.

Приклади матеріальних моделей перпендикулярів до площини: стовп, телевізійна вежа. Перпендикулярно до площини зазвичай забивають палі, бурять свердловини, проходять шахтні стволи, запускають космічні апарати. Тільки піднявшись на певну висоту, ракета-носій відхиляється в потрібному напрямі.

! **Теорема 20** (про три перпендикуляри). ***Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проекції похилої, перпендикулярна до цієї похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай AC і AB – перпендикуляр і похила до площини α (мал. 187). Якщо пряма KP лежить у площині α,



Мал. 187

то $KP \perp AC$. Якщо, крім того, пряма KP перпендикулярна до BC або AB, то вона перпендикулярна до площини трикутника ABC (наслідок з теореми 16), а отже, і до прямої AB або BC. Тобто: якщо $KP \perp BC$, то $KP \perp AB$; якщо $KP \perp AB$, то $KP \perp BC$. Що і треба було довести.

З доведення випливає, що коли пряма KP не перпендикулярна до BC, то вона не перпендикулярна і до AB. Тому теорему можна сформулювати одним твердженням.

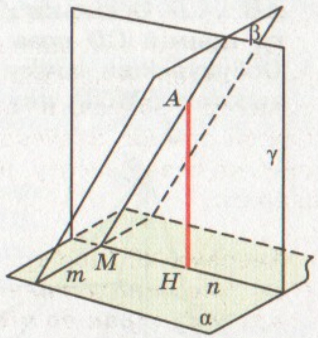
! ***Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли ця пряма перпендикулярна до проекції похилої.***

Це твердження називають теоремою про три перпендикуляри, маючи на увазі перпендикуляри: $AC \perp \alpha$, $BC \perp KP$, $AB \perp KP$.

Для допитливих

Як побудувати перпендикуляр, опущений з даної точки A на площину α? Виконати це можна таким способом (мал. 188).

1) У даній площині α проведемо довільну пряму m.
2) Через m і дану точку A проведемо площину β.
3) У площині β через точку A проведемо пряму AM, перпендикулярну до прямої m.
4) У площині α через точку M проведемо пряму n, перпендикулярну до m.
5) Через прямі AM і n проведемо площину γ.
6) У площині γ з точки A опустимо перпендикуляр AH на пряму n. Цей перпендикуляр – відрізок, який і треба було побудувати.



Мал. 188

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки пряма m перпендикулярна до n і AM, то вона перпендикулярна до площини γ, а отже, і до прямої AH. Пряма AH перпендикулярна до прямих n і m, які перетинаються, тому – й до площини α. Відрізок AH перпендикулярний до площини α, тому він – перпендикуляр, опущений з A на α.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке перпендикуляр до площини?
2. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? А проекція похилої на площину?
3. Укажіть найважливіші властивості перпендикуляра, похилої і її проекції на площину.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.

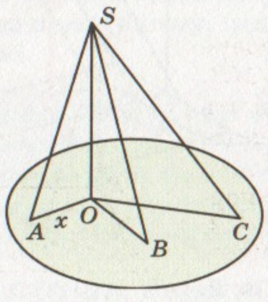
Виконаємо разом

1. З точки S до площини проведено три похилі, завдовжки 25 см, 30 см і 40 см. Знайдіть проекцію третьої похилої на цю площину, якщо різниця проекцій перших двох похилих дорівнює 11 см.

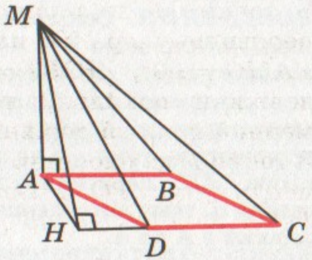
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $OA = x$, тоді $OB = x + 11$ (мал. 189). З $\triangle SOA$ і $\triangle SOB$ за теоремою Піфагора $SO^2 = SA^2 - OA^2$ і $SO^2 = SB^2 - OB^2$. Тоді $SA^2 - OA^2 = SB^2 - OB^2$, або $625 - x^2 = 900 - (x + 11)^2$, звідси $x = 7$. Тоді $AO = 7$ см, $BO = 18$ см, $SO = \sqrt{625-49} = 24$ см. З $\triangle SOC$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $OC = \sqrt{1600-576} = 32$ (см).

2. MA – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, $\angle BAD = 60°$. Побудуйте висоту MH трикутника MCD.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Треба побудувати перпендикуляр MH до прямої CD (мал. 190). За теоремою про три перпендикуляри $AH \perp CD$. Оскільки $\angle ADH = 60°$, то точка H повинна лежати на прямій CD поза відрізком CD так, щоб $HD = 0{,}5CD$. Побудувавши точку H, проводимо відрізок MH. Він і є висотою $\triangle MCD$, яку треба було побудувати.



Мал. 189

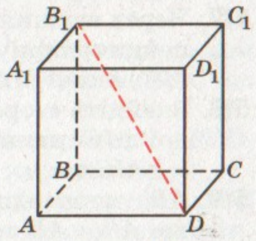


Мал. 190

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

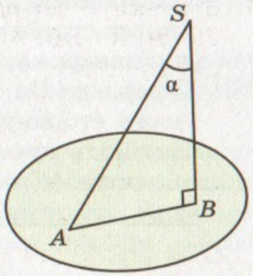
Виконайте усно

508. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 191). Укажіть проекції відрізка B_1D на площини $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1, BCC_1B_1.



Мал. 191

509. З точки S до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими α (мал. 192). Знайдіть: а) довжину перпендикуляра і проекції похилої, якщо довжина похилої l; б) довжину похилої і її проекції, якщо перпендикуляр дорівнює h; в) довжину похилої і перпендикуляра, якщо довжина проекції дорівнює a.



Мал. 192

510. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 191) $DC_1 \perp BC$, $A_1C \perp BD$, $AC \perp BD_1$.

511. BM – перпендикуляр до площини чотирикутника $ABCD$ (мал. 193). Які з пар прямих MA і AD, MC і CD, MO і AC перпендикулярні, якщо: а) $ABCD$ – прямокутник, відмінний від квадрата; б) $ABCD$ – ромб, відмінний від квадрата; в) $ABCD$ – квадрат.

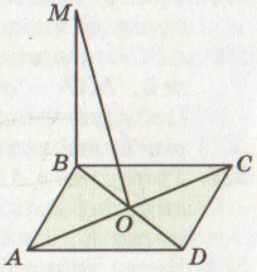
А

512. З точки A проведено до однієї і тієї самої площини перпендикуляр $AC = 40$ см і похилу $AB = 50$ см. Знайдіть довжину проекції похилої.

513. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA та MB. Знайдіть MO, якщо довжини похилих пропорційні числам 5 і 13, а їх проекції дорівнюють 4 см і $4\sqrt{10}$ см.

514. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA, MB. $\angle AMO = 60°$, $\angle BMO = 45°$. Знайдіть довжини похилих, якщо проекція меншої похилої дорівнює a.

515. З точки P до площини проведено перпендикуляр PO і похилі PA, PB, $PO = a$, $\angle PAO = 45°$, $\angle PBO = 30°$. Знайдіть кут між похилими, якщо кут між їх проекціями дорівнює 90°.



Мал. 193

516. З точки S до площини проведено перпендикуляр SO та похилі $SA = 13$ см і $SB = 20$ см. Знайдіть кут між проекціями похилих, якщо $AO = 5$ см, а косинус кута між похилими дорівнює 0,4.

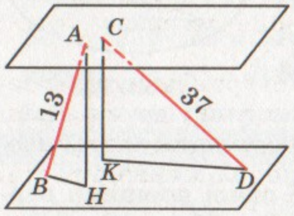
517. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до його площини. Знайдіть відстані MB і MC, якщо $MA = AB = a$ і $\angle ABC = 120°$.

518. Знайдіть сторону ромба $ABCD$, якщо AC – проекція похилої MC на площину цього ромба і $MA = a$, $\angle BAD = \angle MCA = \alpha$.

519. AB – перпендикуляр до площини α, $C \in \alpha$ і $D \in \alpha$. Доведіть, що $AC = AD$ тоді і тільки тоді, коли $BC = BD$.

520. Через вершину C прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α, $\alpha \parallel AB$. Проекція меншого катета на площину дорівнює 8 см. Знайдіть проекції інших сторін трикутника на площину α, якщо $AB = 26$ см, а різниця катетів 14 см.

521. З вершин B і C ромба $ABCD$ до площини α, яка проходить через сторону AD, проведено перпендикуляри BB_1 і CC_1. Знайдіть проекції діагоналей і сторін ромба на площину α, якщо $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $BB_1 = 8$ см.



Мал. 194

522. Два відрізки, довжини яких 13 дм і 37 дм, упираються кінцями в дві паралельні площини (мал. 194). Проекція меншого з них на площину дорівнює 5 дм. Знайдіть довжину проекції другого відрізка.

523. Пряма a перетинає площину α, точка M належить α. Проведіть у площині α пряму MK, перпендикулярну до a.

524. Учень каже: «Пряма, перпендикулярна до похилої, перпендикулярна і до проекції цієї похилої». Наведіть контрприклад.

525. Трикутник ABC – рівнобедрений, $AB = BC$, BM – перпендикуляр до площини трикутника. Побудуйте $MK \perp AC$, $K \in AC$.

526. $ABCD$ – прямокутник, O – точка перетину його діагоналей, MO – перпендикуляр до площини прямокутника. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін прямокутника.

527. Трикутник ABC – прямокутний, $\angle C = 90°$. MB – перпендикуляр до площини трикутника. На прямій AC знайдіть точку K, у якій $MK \perp AC$.

528. Через точку O перетину медіан рівностороннього трикутника проведено перпендикуляр MO до його площини. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін трикутника.

529. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими AC_1 і BD.

530. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. $AC_1 \perp BD$. Доведіть, що грань $ABCD$ – квадрат.

531. MA – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC, K – середина сторони BC. Доведіть, що $MK \perp BC$.

532. MB – перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть, що трикутники AMD і MCD прямокутні.

533. Основою тетраедра $SABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Ребро AS перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що всі бічні грані піраміди – прямокутні трикутники.

534. Доведіть, що в правильному тетраедрі протилежні ребра перпендикулярні.

535. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки K, L, M – середини ребер AA_1, CC_1, AD відповідно, O – точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $OM \perp AD$ і $OD \perp KL$.

536. K – середина сторони ромба, $MK = 12$ см – перпендикуляр, проведений до площини ромба. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до діагоналей ромба. Знайдіть довжини цих перпендикулярів, якщо сторона ромба 20 см, а кут 60°.

537. O – середина гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами 10 см і 18 см. OS – перпендикуляр до площини трикутника, $OS = 12$ см. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки S до катетів трикутника, і знайдіть їхні довжини.

538. Сторони трикутника ABC дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, O – центр вписаного в трикутник кола, MO – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть довжини відрізків перпендикулярів, проведених з M до сторін трикутника, якщо $MO = 3$ см.

539. У трикутнику ABC $AB = BC = 10$ см, $\angle ABC = 120°$. MB – перпендикуляр, проведений до площини трикутника. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до AC, якщо $MC = 15$ см.

540. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см. CM – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть CM, якщо $MK \perp AB$, $K \in AB$ і $MK = 10$ см.

541. $ABCD$ – тетраедр, усі ребра якого дорівнюють a. DO – перпендикуляр до площини $\triangle ABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через DO, перпендикулярно до AC. Знайдіть площу перерізу.

Б

542. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA та MB. Різниця між похилими дорівнює 7 см, а між проекціями 11 см. Знайдіть довжину MO, якщо більша похила відноситься до своєї проекції як $5 : 4$.

543. З точки P до площини проведено перпендикуляр PO і три похилі PA, PB, PC, $C \in AB$, $AC = BC = 10$ см. Знайдіть довжини найбільшої і найменшої похилих, якщо $BO = 16$ см, $\angle AOB = 90°$, $\text{tg}\angle PCO = 0{,}5$.

544. Із центра O кола, вписаного в прямокутний трикутник, до його площини проведено перпендикуляр OM. Точка дотику ділить гіпотенузу на відрізки 5 см і 12 см. Знайдіть довжини похилих, проведених в точки дотику, якщо $OM = 4$ см.

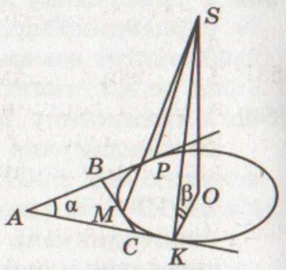
545. Відрізки AB і MN з кінцями на паралельних площинах α і β ($A \in \alpha$, $M \in \alpha$) лежать на мимобіжних прямих. Знайдіть KN – проекцію відрізка MN на площину β, якщо $AB \perp \beta$, $AM = 3$ см, $BN = 8$ см, $\angle KBN = 60°$.

546. З вершин A і C ромба $ABCD$ до площини α, яка проходить через діагональ BD, проведено перпендикуляри AM і CN. Знайдіть проекції сторін та діагоналей ромба на площину α, якщо $AC : BD = 12 : 5$, $AM = 2\sqrt{11}$ м, а площа ромба 120 $м^2$.

547*. Коло з центром O дотикається до сторони BC трикутника ABC у точці M, а продовження сторін AB і AC у точках P і K (мал. 195). SO – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть довжини похилих SM, SP, SK, якщо периметр $\triangle ABC$ дорівнює $2p$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle SKO = \beta$.

548. Одна зі сторін правильного трикутника ABC, площа якого $16\sqrt{3}$ $см^2$, лежить у площині α, а проекції двох інших сторін на цю площину дорівнюють $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть довжини проекцій медіан цього трикутника на площину α.

549. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 15 см, а кут 120°. З точки перетину діагоналей трапеції до площини, яка проходить через більшу основу, проведено перпендикуляр завдовжки 6 см. Знайдіть довжини проекцій сторін трапеції на цю площину.



Мал. 195

550. Дано правильний тетраедр $ABCD$. Побудуйте його переріз ABK, який би мав найменшу площу.

551. З вершини A прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр до його площини. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, якщо його кінець H віддалений від вершин B, C і D відповідно на 5 м, 11 м і 10 м.

552. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що пряма A_1C перпендикулярна до площини трикутника AB_1D_1.

553. Доведіть, що коли в тетраедрі $ABCD$ $AB \perp CD$ і $AC \perp BD$, то $AD \perp BC$.

554. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M і N – середини AD і CD відповідно. Доведіть, що $B_1M \perp AN$.

555*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = a$, $AD = 2a$, K – середина AA_1, M – точка перетину діагоналей грані DD_1C_1C, $N \in AD$, $AN : ND = 1 : 7$. Доведіть, що $KM \perp B_1N$.

556. Ромб $ABCD$ зігнули по діагоналі BD так, що точка A не належить площині (BCD), O – точка перетину діагоналей ромба. Доведіть, що:

а) проекція AO на площину (BCD) лежить на прямій CO;
б) перпендикуляр, опущений з точки C на площину (ABD), перетне пряму AO.

557. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, $AB = 10$ см, $AC : BD = 4 : 3$. MO – перпендикуляр, проведений до площини ромба. Знайдіть довжини відрізків, проведених з точки M перпендикулярно до сторін ромба, якщо $MO = 2$ см.

558. SB – перпендикуляр до площини трикутника ABC. Знайдіть площу трикутника ASC, якщо $AB = 15$ м, $BC = 13$ м, $AC = 14$ м, $SB = 5$ м.

559. BK – перпендикуляр, проведений до площини рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть площу трикутника AKC, якщо $BK = h$, $\angle KCB = \alpha$.

560. $SABC$ – правильний тетраедр, SO – його висота. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку O паралельно AS і BC, та знайдіть площу перерізу, якщо $AB = a$.

561*. Три ребра прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, мають довжини a, a і $a\sqrt{2}$. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, яка перпендикулярна до діагоналі паралелепіпеда і проходить через її середину.

562*. Через середину діагоналі куба, перпендикулярно до неї, проведено площину. Визначте площу фігури, утвореної в перерізі, якщо ребро куба дорівнює a.

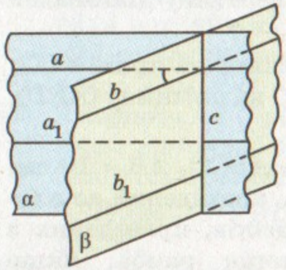
Вправи для повторення

563. Основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$, $SA = SC$. Доведіть, що $AC \perp (SBD)$.

564. AK і AP – медіани граней ABD і ABC тетраедра $ABCD$. Чи паралельна пряма KP якій-небудь грані тетраедра?

565. Пряма m паралельна одній з двох мимобіжних прямих. Доведіть, що m не може бути паралельною іншій прямій.

§ 15 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ



Мал. 196

Спочатку введемо поняття *кута між площинами*. Нехай α і β – площини, які перетинаються по прямій c (мал. 196). Проведемо в цих площинах прямі a і b, перпендикулярні до прямої c. Нехай кут між ними $\angle(ab) = \varphi$. Якщо в даних площинах провести які-небудь інші прямі a_1 і b_1, перпендикулярні до c, кут між ними буде такий самий: $\angle(a_1b_1) = \varphi$ (див. теорему 14, с. 120). Тому можна прийняти таке означення.

Кутом між площинами, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину. Якщо площини паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°.

Кут між площинами α і β позначають $\angle(\alpha\beta)$. Він набуває значень у тих самих межах, що і кут між прямими:

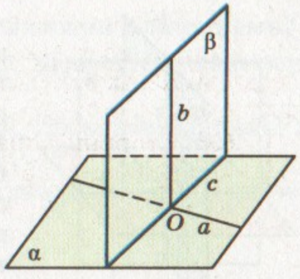
$$0° \le \angle(\alpha\beta) \le 90°.$$

Дві площини називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

! **Теорема 21** (ознака перпендикулярності площин). ***Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай площина β проходить через пряму b, перпендикулярну до площини α (мал. 197). Доведемо, що $\beta \perp \alpha$.

Пряма b перетинає площину α у деякій точці O. Ця точка спільна для площин α і β. Тому дані площини перетинаються по прямій c, яка проходить через точку O. Проведемо у площині α через точку O пряму a, перпендикулярну до c. Оскільки прямі a і c лежать у площині α і $b \perp \alpha$, то $b \perp a$ і $b \perp c$. Крім того, $a \perp c$. Отже, $\angle(\alpha\beta) = \angle(ab) = 90°$, тобто $\beta \perp \alpha$.



Мал. 197

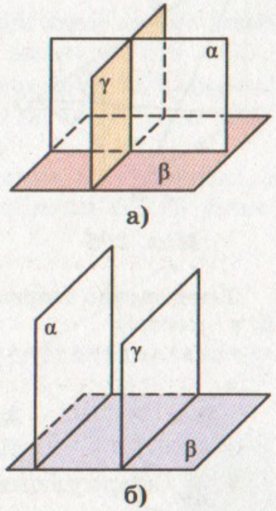
! **Теорема 22.** ***Пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c, і в площині β проведено пряму b перпендикулярно до c (мал. 197). Доведемо, що $b \perp \alpha$. Для цього проведемо у площині α пряму a, перпендикулярну до прямої перетину площин α і β. Тоді кут між прямими a і b дорівнює куту між площинами α і β, тобто 90°. Отже, пряма b перпендикулярна до прямих a і c площини α, які перетинаються. Маємо: $b \perp a$. Що й треба було довести.

Під однаковими кутами до горизонтальної площини бувають нахилені вугільні пласти, стіни каналів, відкоси насипів, схили дахів тощо. У перпендикулярних площинах розміщені суміжні грані цеглини, бруска, швелера, багатьох столярних виробів, стіна і підлога, стіна і стеля кімнати.

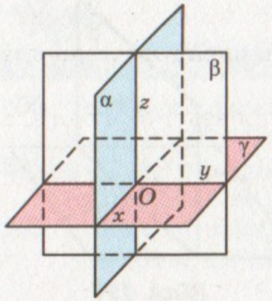
Теорему 22 можна ілюструвати таким наочним прикладом. Якщо пряма, яка проходить через центри петель дверей, перпендикулярна до площини підлоги, то як би не повертали двері, їхня площина буде перпендикулярною до площини підлоги.

Відношення перпендикулярності площин симетричне (якщо $\alpha \perp \beta$, то $\beta \perp \alpha$), але не транзитивне: якщо $\alpha \perp \beta$ і $\beta \perp \gamma$, то площини α і γ необов'язково перпендикулярні. Вони можуть перетинатися під довільним гострим кутом (мал. 198, *а*) і можуть бути навіть паралельними (мал. 198, *б*).



Мал. 198

10-Geometrija.10kl.



Мал. 199

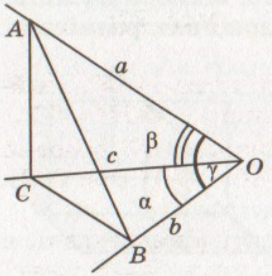
Якщо три площини α, β і γ попарно перпендикулярні, то вони перетинаються по попарно перпендикулярних прямих x, y і z таких, що $x \perp y$, $y \perp z$, $z \perp x$ (мал. 199). Якщо такі попарно перпендикулярні прямі x, y, z – координатні прямі зі спільним початком координат O, то вони становлять систему координат тривимірного простору. Вона дає можливість кожній точці простору поставити у відповідність єдину впорядковану трійку дійсних чисел, а кожній трійці дійсних чисел – єдину точку простору. З системою координат тривимірного простору ви ознайомитеся згодом.

Для допитливих

Розглянемо задачу.

Три промені, які виходять з однієї точки, утворюють три гострі кути: α, β, γ. Доведіть, що коли площини кутів α і β перпендикулярні, то $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $\angle(bc) = \alpha$, $\angle(ca) = \beta$, $\angle(ab) = \gamma$ (мал. 200). З довільної точки A променя a опустимо перпендикуляри AC на промінь c і AB на промінь b. Оскільки площини кутів α і β перпендикулярні, то CB – проекція AB на площину кута α. За теоремою про три перпендикуляри $CB \perp b$. Отже, трикутники ACO, CBO і ABO прямокутні. Тому



Мал. 200

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{BO}{CO} \cdot \frac{CO}{AO} = \frac{BO}{AO} = \cos\gamma.$$

Доведену рівність $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$ називають **теоремою про три косинуси.**

Справедливе й обернене твердження.

Якщо три промені, що виходять з однієї точки, утворюють три гострі кути α, β і γ, *для яких* $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$, *то площини кутів* α *і* β *– перпендикулярні.* Спробуйте це довести методом від супротивного.

Доведіть, що теорема має місце і у випадку, коли не всі кути α, β, γ – гострі.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення кута між площинами.
2. Які площини називаються перпендикулярними?

3. Як визначається кут між паралельними площинами?
4. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.
5. Сформулюйте властивість прямої, проведеної в одній з двох перпендикулярних площин.
6. Чи є відношення перпендикулярності площин симетричним? А транзитивним?

Виконаємо разом

1. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють a і b. Площина α проходить через гіпотенузу трикутника і утворює з його площиною кут φ. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до її проекції на площину α.

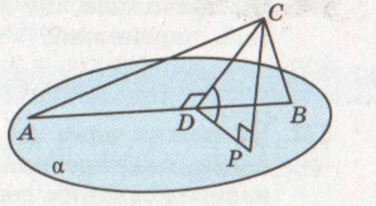
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $CP \perp \alpha$ і $CD \perp AB$, тоді PD – проекція CD на площину α (мал. 201).

За теоремою про три перпендикуляри $PD \perp AB$. Отже, $\angle PDC = \varphi$.

З $\triangle ABC$: $CD \cdot AB = AC \cdot BC$, звідси $CD = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

З $\triangle CPD$: $CP = CD \cdot \sin\varphi$. Отже,

$$CP = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\varphi.$$



Мал. 201

2. Промінь OP утворює з променями OH і OM кути по $45°$. Знайдіть кут між площинами POM і POH, якщо $\angle MOH = 60°$.

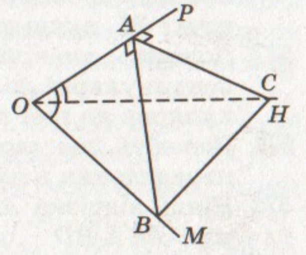
РОЗВ'ЯЗАННЯ. *Перший спосіб.* На промені OP оберемо довільну точку A і побудуємо $AB \perp OP$ і $AC \perp OP$ (мал. 202). Тоді $\angle BAC$ – шуканий.

Трикутники BAO і CAO – прямокутні і рівнобедрені, а тому $AB = AO$, $AC = AO$ і $OB = OC$. Оскільки $\triangle COB$ рівнобедрений і містить кут в $60°$, то він рівносторонній, а тому $OB = CB$.

Маємо: $\triangle CAB = \triangle OAB$ (за трьома сторонами).

Отже, $\angle BAC = \angle BAO = 90°$.

Другий спосіб. Оскільки за умовою задачі промені утворюють між собою кути $45°$, $45°$ і $60°$, а $\cos 45° \cdot \cos 45° = \dfrac{1}{2} = \cos 60°$, то для цих кутів виконується рівність $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$.



Мал. 202

Отже, за теоремою, оберненою до теореми про три косинуси, площини (POM) і (POH) утворюють прямий кут.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

566. Скільки площин, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

567. Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки площин, які перетинають площину α під даним кутом φ, можна провести через пряму a?

568. Скільки пар перпендикулярних площин можна провести через дану пряму?

569. Скільки пар перпендикулярних площин можна провести через дві дані паралельні прямі?

570. Чи можна через пряму a, перпендикулярну до площини α, провести площину, не перпендикулярну до α?

571. Чи правильно, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?

А

572. Чи можна через дві перпендикулярні прямі провести площини, які перетинаються під кутом 30°? А під будь-яким наперед заданим гострим кутом?

573. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть, що площини (MAC) і (MBD) перпендикулярні.

574. O – точка перетину діагоналей ромба, OM – перпендикуляр до площини ромба. Доведіть, що площини, які проходять через точку M і діагоналі ромба – перпендикулярні.

575. Трикутник ABC і прямокутник $ABMN$ лежать у взаємно перпендикулярних площинах. Доведіть, що кут CAN прямий.

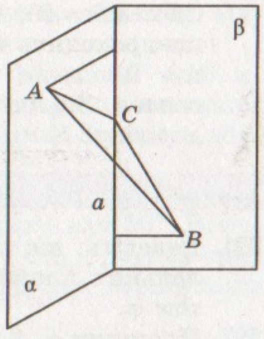
576. Із центра O квадрата $ABCD$ проведено відрізок OM перпендикулярно до площини квадрата. Знайдіть кут між площиною квадрата і площиною, проведеною через DC і точку M, якщо квадрат і $\triangle DMC$ – рівновеликі.

577. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої, то лінія їх перетину перпендикулярна до цієї площини.

578. Доведіть, що площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої.

579. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD – перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин. Знайдіть CD, якщо: а) $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, $AB = 12$ см; б) $AD = 4$ см, $BC = 7$ см, $AB = 8$ см; в) $AC = BD = a$, $AB = 2a$.

580. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD – перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин, $AC = 6$ м, $BD = 3\sqrt{3}$ м. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $\angle DBC = 30°$.



Мал. 203

581. Трикутник ABC – рівнобедрений, $AB = 24$ см, $\angle C = 120°$. Точки A і B лежать у перпендикулярних площинах, а точка C на прямій a – лінії перетину цих площин. Знайдіть довжини перпендикулярів, проведених з точок A і B до прямої a, якщо кут між AC і прямою a дорівнює 45° (мал. 203).

582. Квадрат $ABCD$ зігнули по діагоналі AC так, що площини (ABC) і (ADC) стали перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками B і D, якщо $AB = a$.

583. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у площинах, кут між якими 60°. Знайдіть відстань між їхніми центрами, якщо $AB = 2m$.

584. Площини квадратів $ABCD$ і ABC_1D_1 перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть: а) відстань CC_1; б) відстань C_1D; в) кут між діагоналями AC і AC_1.

585. Два рівносторонні трикутники ABM і ABN лежать у різних площинах. Знайдіть MN, якщо $AB = a$ і кут між площинами дорівнює: а) 90°; б) 60°.

586. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні. Знайдіть кут $\varphi = \angle CAD$.

587. Знайдіть довжини сторін правильних трикутників ABC і ABD, якщо їх площини перпендикулярні і $CD = a$.

588. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Точки M, N і K – середини ребер AB, B_1C_1 і BC відповідно. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки M, N і K. Доведіть, що площина основи і площина перерізу перпендикулярні. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо $B_1B = 16$ м, $B_1D = 20$ м.

589. Основою прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$. Доведіть, що площини перерізів ACC_1 і BB_1D – взаємно перпендикулярні. Знайдіть відношення площ утворених перерізів, якщо $AC : BD = m : n$.

590. Основою тетраедра $ABCD$ є трикутник ABC ($\angle C = 90°$) і $DA = DB = DC$. На ребрі CD взято точку K так, що

$CK : KD = 2 : 1$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку K паралельно AD і BD. Доведіть, що площина перерізу перпендикулярна до площини основи. Знайдіть площу перерізу, якщо площа грані ABD дорівнює S.

Б

591. Доведіть, що площина, яка перетинає одну з двох паралельних площин під кутом φ, перетинає і другу під кутом φ.

592. Площини α, β, γ попарно перпендикулярні. Доведіть, що і прямі, по яких вони перетинаються, попарно перпендикулярні.

593. Як через дану пряму провести площину, перпендикулярну до даної площини? Розгляньте всі можливі випадки.

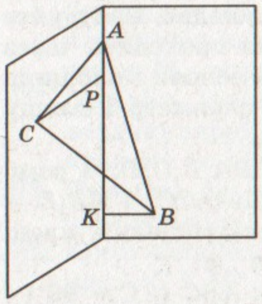
594. Точка M рівновіддалена від вершин прямокутного трикутника ABC, $\angle C = 90°$. Доведіть, що площини (AMB) і (ABC) перпендикулярні.

595. Прямокутник $ABCD$ і ромб $ABMN$ розміщені так, що їх площини перпендикулярні. Доведіть, що кут MBC – прямий.

596. Два правильні трикутники ABC і MBC розміщені у двох перпендикулярних площинах. Знайдіть кут між площинами (ABC) і (AMB).

597*. $ABCD$ – ромб, $\angle B = 120°$. Пряма AP перпендикулярна до площини ромба, $AB = AP$. Знайдіть кут між площинами: а) (ABC) і (APB); б) (APB) і (APD); в) (CPD) і (ABC); г) (APD) і (BPC); ґ) (BCP) і (DCP).

598. Точки A і B розміщені у двох взаємно перпендикулярних площинах, C і D – основи перпендикулярів, проведених з точок A і B відповідно до лінії перетину площин. $AC = 3\sqrt{6}$ см, $BD = 12$ см, $CD = 15$ см. Знайдіть $\angle AMB$, якщо $M \in CD$, $CM : MD = 2 : 1$.



Мал. 204

599. Катет і гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника лежать у двох взаємно перпендикулярних площинах. Вершина прямого кута віддалена від лінії перетину площин на 12 см, а вершина гострого кута – на $5\sqrt{7}$ см. Знайдіть площу трикутника (мал. 204).

600. Прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 15$ см, $AD = 20$ см зігнули по діагоналі BD так, що площини (ABD) і (BCD) виявилися перпендикулярними. Знайдіть довжину відрізка AC.

601. У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$), $AC = 12$ м, $BC = 16$ м. Трикутник зігнули по медіані CM так, що площини (ACM) і (BCM) стали перпендикулярними. Знайдіть довжину відрізка AB.

602. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу завдовжки 16 см, а їх площини утворюють кут 60°. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, а другий трикутник прямокутний. Знайдіть відстань між вершинами трикутників.

603. Площі двох рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу, дорівнюють 48 см^2 і 90 см^2. Бічна сторона першого трикутника дорівнює 10 см. Знайдіть кут між площинами трикутників, якщо відстань між їхніми вершинами дорівнює 13 см.

604*. Трикутники ABC і ABD лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань CD, якщо $AC = AD = a$, $BC = BD = b$ і $AB = c$.

605*. Площини правильних шестикутників $ABCDEF$ і $ABC_1D_1E_1F_1$ перпендикулярні. Знайдіть міри кутів EAE_1, DAD_1 і CAC_1.

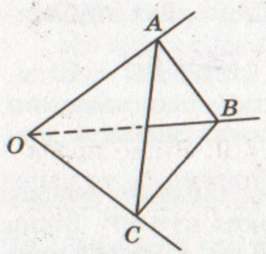
606. Площини квадрата $ABCD$ і правильного трикутника ABK перпендикулярні. Знайдіть міру кута ACK.

607. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $M \in A_1B_1$, $A_1M : MB_1 = 1 : 2$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною α, яка проходить через AD і точку M. а) Доведіть, що площина перерізу перпендикулярна до площини грані AA_1B_1B. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = 15$ см, $AA_1 = 12$ см, $AD = 20$ см. б) Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через BC, перпендикулярно до площини α. Знайдіть його периметр і площу.

608. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Побудуйте перерізи куба площинами (BCD_1) і (DC_1B_1). Доведіть, що площини перерізів перпендикулярні.

609. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $M \in DC$, $N \in CC_1$, $DM : MC = CN : NC_1 = 2 : 1$. Доведіть, що площини перерізів, проведені через AD і N та A_1D_1 і M, взаємно перпендикулярні. Знайдіть площі перерізів, якщо ребро куба a.

610. $ABCD$ – правильний тетраедр з ребром a. M, K – середини AC і BD відповідно. Побудуйте перерізи тетраедра площинами, які проходять через точки M, D, B і K, A, C. Доведіть, що площини перерізів перпендикулярні. Знайдіть відношення їхніх площ та периметрів.



Мал. 205

611. Основою тетраедра $ABCD$ є трикутник ABC ($\angle C = 90°$), M – середина CD. Точка D рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M, перпендикулярно до (ABC) так, щоб у перерізі утворився: а) довільний трикутник; б) рівнобедрений трикутник; в) трапеція; г) довільний чотирикутник.

612. З вершини B трикутника ABC проведено похилу BL, яка утворює зі сторонами BA і BC рівні кути. Доведіть, що площина (LBK) перпендикулярна до площини трикутника (BK – бісектриса $\triangle ABC$).

613. Плоскі кути при одній вершині тетраедра дорівнюють 45°, 60° і 45°. Який кут утворюють грані тетраедра, що містять рівні кути?

614. Промені OA, OB і OC утворюють три гострі кути такі, що $\angle AOB = \angle AOC = 60°$, а $\angle BOC = 90°$ (мал. 205). Доведіть, що площина (ABC), яка відтинає на променях відрізки рівної довжини, перпендикулярна до площини прямого кута.

615*. З вершини прямого кута A трикутника ABC проведено перпендикуляр AM до площини трикутника. Знайдіть косинуси кутів трикутника MBC, якщо $\angle ABM = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

616*. З точки поза площиною проведено перпендикуляр і дві похилі, що утворюють з площиною кути α, а між собою кут β. Знайдіть кут γ між проекціями цих похилих.

Вправи для повторення

617. Один з кутів ромба дорівнює 60°. Побудуйте зображення цього ромба і його висот, проведених з вершини: а) тупого кута; б) гострого кута.

618. Пряма BK перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$. Доведіть, що пряма перетину площин (ADK) і (BCK) перпендикулярна до площини (ABK).

619. Дано прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що пряма, яка проходить через центри його протилежних граней, перпендикулярна до площин цих граней.

§ 16 ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

Про паралельне проектування йшлося в § 9. Якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій, то таке проектування називають *ортогональним*, або *прямокутним*. Ортогональне проектування – вид паралельного проектування, тому воно має властивості, доведені в § 9. У геометрії ортогональне проектування основне. Далі, говорячи про проектування і проекції, ми матимемо на увазі тільки ортогональне проектування, ортогональні проекції.

Проекцією точки, що не лежить на площині, називається основа перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Якщо точка лежить на площині проекцій, то вона збігається зі своєю проекцією. *Проекцією фігури* на площину називається множина проекцій усіх точок цієї фігури на дану площину.

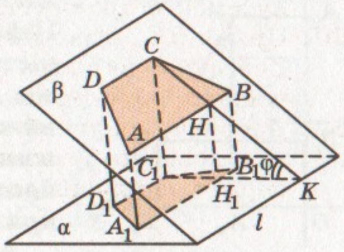
Проекцією відрізка, променя або прямої, не перпендикулярних до площини проекцій, є відповідно відрізок, промінь або пряма. Проекцією n-кутника, площина якого не перпендикулярна до площини проекцій, – n-кутник.

! **Теорема 23.** ***Площа проекції многокутника на площину дорівнює площі даного многокутника, помноженій на косинус кута між їх площинами.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай площина β даного многокутника і площина проекцій α перетинаються під кутом φ по прямій l. Розглянемо спочатку випадок, коли даний многокутник – трапеція $ABCD$, основи якої AB і CD паралельні l (мал. 206). Проекцією даної трапеції є трапеція $A_1B_1C_1D_1$, її основи A_1B_1 і C_1D_1 теж паралельні l (чому?). ABB_1A_1 і DCC_1D_1 – прямокутники, тому $A_1B_1 = AB$, $C_1D_1 = CD$.

Якщо CK – перпендикуляр до l, то за теоремою про три перпендикуляри і $C_1K \perp l$. Отже, $\angle CKC_1 = \varphi$. Якщо $CK \cap AB = H$ і $C_1K \cap A_1B_1 = H_1$, то CH і C_1H_1 – висоти розглядуваних трапецій, причому C_1H_1 – проекція CH. Отже, $C_1H_1 = CH \cos\varphi$. Тому, якщо S і $S_п$ площі трапецій $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, то

$$S_п = \frac{1}{2}(A_1B_1 + C_1D_1)C_1H_1 =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + CD)CH\cos\varphi = S\cos\varphi.$$



Мал. 206

У випадку, коли дана фігура – трикутник ABC, у якого $AB \parallel l$, повторивши майже дослівно наведені вище міркування, дістанемо ту саму залежність: $S_п = S \cos \varphi$.

Нарешті, нехай дано довільний многокутник $ABC...F$. Проведемо через його вершини прямі, паралельні l. Вони розіб'ють даний многокутник на скінченне число трапецій і трикутників, основи яких паралельні прямій l. Якщо $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – площі цих трапецій і трикутників, а $S'_1, S'_2, \ldots, S'_k$ – площі їх проекцій, то за доведеним вище:

$$S'_1 = S_1 \cos \varphi,\ S'_2 = S_2 \cos \varphi,\ \ldots,\ S'_k = S_k \cos \varphi.$$

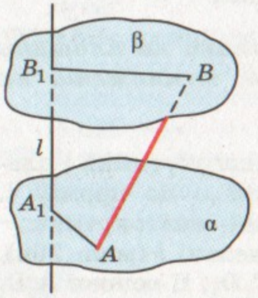
Отже,

$$S_п = S'_1 + S'_2 + \ldots + S'_k = (S_1 + S_2 + \ldots + S_k)\cos \varphi = S \cos \varphi.$$

Теорему доведено.

Розглянемо ще проекції фігур на пряму.

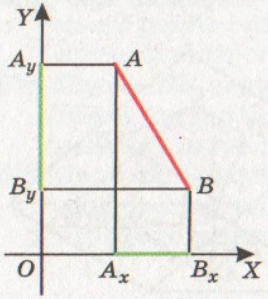
Проекцією точки на пряму (що не проходить через цю точку), називається основа перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму. Якщо точка лежить на прямій, то вона є своєю проекцією на дану пряму. *Проекцією фігури на пряму* називають множину проекцій усіх точок цієї фігури на дану пряму.



Мал. 207

Щоб побудувати проекцію відрізка AB на пряму l, достатньо через точки A і B провести площини, перпендикулярні до прямої l (мал. 207). Обмежений цими площинами відрізок A_1B_1 прямої l і буде шуканою проекцією відрізка AB на пряму l. Довжини проекцій двох паралельних відрізків на пряму відносяться як довжини відрізків, що проектуються.

Нехай у площині дано перпендикулярні прямі OX, OY і відрізок AB (мал. 208). Якщо A_xB_x, A_yB_y – проекції відрізка AB на прямі OX, OY і якщо $AB \nparallel OX$, $AB \nparallel OY$, то за теоремою Піфагора $AB^2 = A_xB_x^{\ 2} + A_yB_y^{\ 2}$. Ця рівність справедлива і тоді, коли $AB \parallel OX$ або $AB \parallel OY$. Отже, теорему Піфагора можна узагальнити так: ***квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проекцій на дві перпендикулярні прямі.***

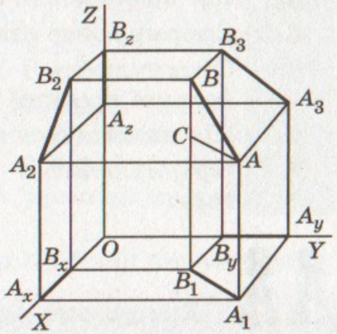


Мал. 208

Аналогічне твердження правильне і для простору.

! **Теорема 24** (просторова теорема Піфагора). ***Квадрат довжини будь-якого відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на три взаємно перпендикулярні прямі.***

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо загальний випадок, коли даний відрізок AB не перпендикулярний до жодної з даних попарно перпендикулярних прямих OX, OY, OZ (мал. 209). Проекції відрізка AB на площини XOY, XOZ, YOZ позначимо відповідно через A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, а на прямі OX, OY, OZ – через A_xB_x, A_yB_y, A_zB_z. Тоді, якщо $AC \perp BB_1$, то $AC = A_1B_1$ і $BC = B_zA_z$. Отже, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = A_1B_1^{\ 2} + A_zB_z^{\ 2}$.



Мал. 209

За доведеним вище $A_1B_1^{\ 2} = A_xB_x^{\ 2} + A_yB_y^{\ 2}$. Тому

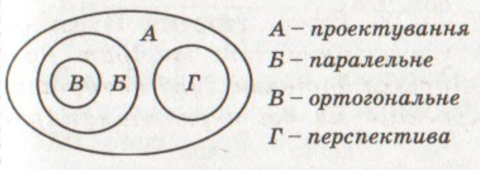
$$AB^2 = A_xB_x^{\ 2} + A_yB_y^{\ 2} + A_zB_z^{\ 2}. \qquad (*)$$

Якщо, наприклад, $AB \perp OZ$, то $A_zB_z = 0$ і $AB^2 = A_1B_1^{\ 2} = A_xB_x^{\ 2} + A_yB_y^{\ 2}$. Бачимо, що рівність (*) справедлива при будь-якому розташуванні відрізка AB.

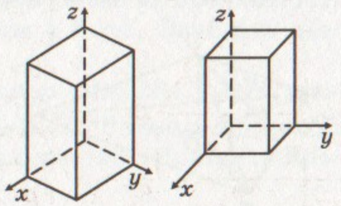
Для допитливих

Поняття *проектування, паралельне проектування і ортогональне проектування* пов'язані між собою, як показано на діаграмі (мал. 210). Тобто ортогональне проектування – окремий вид паралельного проектування, а паралельне проектування – вид проектування. Інший вид останнього – центральне проектування (перспектива).

Зображати фігури при ортогональному проектуванні можна різними способами, докладно їх розглядають у кресленні – ізометричні і диметричні зображення (мал. 211) та епюри – у *проективній геометрії*.



Мал. 210

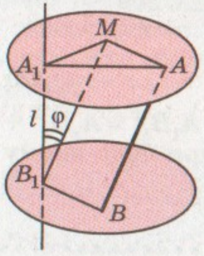


Мал. 211

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які види проектування ви знаєте?
2. Яке проектування називають ортогональним?
3. Що називається проекцією точки на площину?
4. Сформулюйте означення проекції фігури на площину.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про площу ортогональної проекції многокутника.
6. Що називається проекцією точки на пряму?
7. Сформулюйте і доведіть просторову теорему Піфагора.

Виконаємо разом



Мал. 212

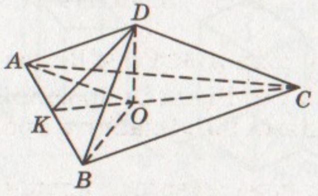
1. Доведіть, що коли A_1B_1 – проекція відрізка AB на пряму l, а φ – кут між AB і l, то $A_1B_1 = AB\cos\varphi$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проведемо через кінці даного відрізка AB площини α і β, перпендикулярні до прямої l (мал. 212). Вони перетнуть пряму l у точках A_1 і B_1. Площини α і β паралельні, тому якщо ABB_1M – паралелограм, то $MB_1 = AB$, $\angle MB_1A_1 = \varphi$ і $A_1B_1 : MB_1 = \cos\varphi$, звідси $A_1B_1 = MB_1\cos\varphi = AB\cos\varphi$.

2. У тетраедрі $ABCD$ $AC = BC = 37$ см, $AD = BD = 13$ см, $AB = 24$ см, $DC = 35$ см. Знайдіть площу ортогональної проекції грані ABD на площину (ABC).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $ABCD$ заданий тетраедр (мал. 213). Знайдемо кут між площинами (ADB) і (ABC). Якщо K – середина AB, то $CK \perp AB$ і $DK \perp AB$, оскільки $\triangle ABC$ і $\triangle ADB$ рівнобедрені. Тоді $\angle DKC$ – шуканий кут. З $\triangle AKC$ і $\triangle AKD$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $KC = 35$ см, $KD = 5$ см. Тоді за теоремою косинусів з $\triangle DKC$ знайдемо:

$$\cos\angle DKC = \frac{KC^2 + KD^2 - DC^2}{2KC \cdot KD} = \frac{1}{14}.$$



Мал. 213

Оскільки $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2}AB \cdot DK = 60$ (см^2), то

$S_{пр} = S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ADB}\cos\angle DKC = \frac{30}{7}$ (см^2).

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

620. Чи може площа ортогональної проекції фігури бути більшою за площу самої фігури? А дорівнювати?
621. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а площа його ортогональної проекції 18 см^2. Знайдіть кут між площинами квадрата та його проекції.
622. Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу ортогональної проекції цього трикутника на площину, яка утворює з площиною трикутника кут 60°.
623. Як розміщені дві прямі, якщо їх проекції на площину – прямі, які перетинаються?
624. Як розміщені дві прямі, якщо їх проекції на площину – паралельні прямі?
625. Чи може проекцією правильного тетраедра на площину бути: а) правильний трикутник; б) неправильний трикутник; в) квадрат; г) чотирикутник, відмінний від квадрата?
626. Чи може проекцією куба на площину бути: а) квадрат; б) прямокутник, відмінний від квадрата; в) п'ятикутник; г) шестикутник?

А

627. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $M \in BB_1$. Доведіть, що проекції трикутника MDD_1 на площини граней ABB_1A_1 і BCC_1B_1 рівні.
628. Доведіть, що проекції будь-якого многокутника на дві паралельні площини рівні.
629. Чи можуть бути рівними проекції однієї і тієї самої фігури на непаралельні площини? Наведіть приклади.
630. Площини α і β перетинаються по прямій a. Довільна точка A проектується на α, β і a. Доведіть, що точка A і її проекції лежать в одній площині.
631. Дві похилі, проведені з однієї точки, дорівнюють 15 і 20. Проекція однієї з них 16. Знайдіть проекцію другої.
632. Кожна з похилих AB і CD дорівнює 10 см, їх проекції HB і HD дорівнюють відповідно 6 см і 8 см. Знайдіть відстань AC.
633. З точки M до площини проведено похилі MA і MB, довжини яких дорівнюють 10 см і $8\sqrt{2}$ см. Різниця проекцій цих похилих 2 см, кут між проекціями 90°. Знайдіть проекції похилих на пряму AB.
634. Відрізки двох прямих лежать між паралельними площинами і відносяться як 20 : 13. Проекція одного відрізка

на одну з площин дорівнює 16 см, а іншого відрізка на іншу площину – 5 см. Знайдіть довжини цих відрізків.

635. Відрізок завдовжки 26 см опирається кінцями на дві взаємно перпендикулярні площини. Довжини перпендикулярів, опущених з кінців відрізка до лінії перетину площин, дорівнюють 10 см і 20 см. Знайдіть проекцію відрізка на кожну з площин.

636. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, довжини яких дорівнюють 16 см і 20 см. Обчисліть проекцію перпендикуляра на похилу.

637. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, різниця довжин яких дорівнює 2 см. Обчисліть проекцію перпендикуляра на похилу, якщо проекція похилої на площину дорівнює 6 см.

638. Яка довжина відрізка, якщо довжини його проекцій на три попарно перпендикулярні прямі дорівнюють a, b і c?

639. Яка довжина відрізка, якщо довжини його проекцій на три попарно перпендикулярні площини дорівнюють a, b і c?

640. Через вершини рівностороннього трикутника провели три прямі, перпендикулярні до його площини. Чи можуть на таких прямих лежати вершини прямокутного або тупокутного трикутника?

641. Площа многокутника 70 см^2, а його проекції – 35 см^2. Знайдіть кут між площиною многокутника і площиною проекції.

642. Ортогональною проекцією прямокутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 4 см, є чотирикутник, площа якого 12 см^2. Обчисліть кут між площинами чотирикутників. Чи може дана проекція бути квадратом?

643. Ортогональною проекцією прямокутника є квадрат. Площа прямокутника 128 см^2, а кут між площинами 60°. Знайдіть периметр прямокутника.

644. Ортогональною проекцією правильного трикутника зі стороною 20 см на площину, паралельну одній із сторін, є рівнобедрений трикутник, одна зі сторін якого $5\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

645. Ортогональною проекцією правильного трикутника є трикутник зі сторонами 13 м, 14 м, 15 м. Кут між площинами трикутників 30°. Знайдіть периметр даного трикутника.

646. Ортогональною проекцією трапеції, площа якої $52\sqrt{2}$ см^2, є рівнобічна трапеція з основами 16 см і 10 см та бічною стороною 5 см. Знайдіть кут між площинами трапецій.

647. Чотирикутник $AB_1C_1D_1$ – ортогональна проекція ромба $ABCD$ на площину, паралельну меншій діагоналі. Знайдіть довжини проекцій діагоналей, якщо $AB = 20$ см, $BB_1 =$ $= 10$ см, $\angle B = 120°$.

648. Ортогональною проекцією паралелограма $ABCD$ на площину, яка проходить через вершину A паралельно BD, є чотирикутник $AB_1C_1D_1$. Обчисліть AC, якщо $BD = 3\sqrt{21}$ м, $CC_1 = 10$ м, $AD_1 = 12$ м, $D_1C_1 = 9$ м.

649. $ABCD$ – правильний тетраедр, ребро якого дорівнює a. Побудуйте проекцію грані CDB на площину (ABC). Знайдіть площу проекції та кут між площинами (ABC) і (CDB).

650. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. $AB : AD : AA_1 =$ $= 1 : 2 : 3$, $M \in CC_1$, $CM : MC_1 = 2 : 1$. Знайдіть кут між площиною $\triangle BMD$ та його проекцією на площину: а) (ABC); б) (BB_1D).

Б

651. Побудуйте проекцію діагоналі основи куба на площину, яка проходить через дві діагоналі його суміжних бічних граней. Знайдіть довжину проекції, якщо довжина діагоналі дорівнює d.

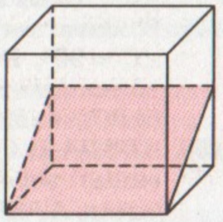
652. У кубі через ребро основи і середини двох бічних ребер проведено площину (мал. 214). Знайдіть кут між даною площиною і площиною основи і площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

653. В основі тетраедра лежить правильний трикутник зі стороною l. Через ребро основи і середину протилежного ребра проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу перерізу, якщо всі бічні ребра тетраедра рівні.

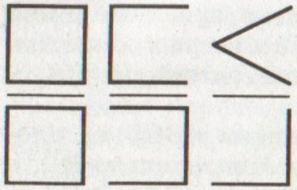
654. В основі прямого паралелепіпеда лежить квадрат зі стороною a. Через середини двох суміжних сторін основи проведена площина, яка перетинає три бічні ребра паралелепіпеда і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу перерізу.

655. Нехай Q – площа грані правильного тетраедра, а Q_1 – площа проекції цієї грані на площину другої грані. Знайдіть $Q_1 : Q$.

656. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть площу проекції цього тетраедра на площину, перпендикулярну до його ребра.



Мал. 214



Мал. 215

657. Намалюйте або опишіть фігури, проекції яких на дві взаємно перпендикулярні площини зображено на малюнку 215.

658. Сторони прямокутника дорівнюють 20 см і 25 см. Його проекція на площину подібна до нього. Знайдіть периметр проекції.

659. З точки K до площини проведено похилі $KA = 13$ см і $KB = 20$ см, а кут між їх проекціями дорівнює $120°$. Проекція більшої похилої дорівнює 16 см. Знайдіть проекцію на цю площину відрізка KP, якщо $P \in AB$ і $AP : PB = 5 : 16$.

660. Основа рівнобедреного трикутника паралельна площині α, а його ортогональна проекція на цю площину – правильний трикутник. Кут між площинами трикутників $30°$. Обчисліть кут при вершині рівнобедреного трикутника.

661. Ортогональною проекцією трапеції є рівнобічна трапеція з основами 7 см і 25 см та діагоналями, які перпендикулярні до бічних сторін. Кут між площинами трапецій $45°$. Обчисліть площу даної трапеції.

662. Ортогональною проекцією трапеції, основи якої паралельні площині проекції, є рівнобічна трапеція з основами a і b, діагоналі якої взаємно перпендикулярні. Кут між площинами трапецій φ. Знайдіть висоту даної трапеції.

663. Через більшу основу AD рівнобічної трапеції $ABCD$ проведено площину. AB_1C_1D – ортогональна проекція трапеції $ABCD$ на цю площину. O – точка перетину діагоналей AC і BD, O_1 – її проекція. Обчисліть площу трапеції $ABCD$, площу її проекції та кут між площинами трапецій, якщо $OO_1 = 12$ см, $AB_1 = 15$ см, $AD = 42$ см, $BC = 28$ см.

664. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах. Знайдіть площу ортогональної проекції $\triangle ABC$ на площину ABD, якщо $AB = 24$ м, $AC = 13$ м, $AD = 37$ м, $CD = 35$ м.

665. В основі тетраедра $ABCD$ лежить трикутник ABC, у якого $\angle C = 90°$, $BC = a$, $AC = b$. Побудуйте проекцію грані ADC на площину (ABC). Знайдіть кут між площинами (ADC) і (ABC), якщо $DA = DB = DC = l$.

666. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M – середина BB_1. Побудуйте проекцію перерізу куба площиною, яка проходить через точки A, M, C_1, на площину (BB_1D_1). Знайдіть кут між площинами.

667*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M, N, K – середини ребер B_1C_1, CC_1, CD відповідно. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки M, N, K. Обчисліть проекцію діагоналі B_1D на цю площину, якщо ребро куба дорівнює a.

668*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M, N, K – середини ребер AA_1, AD, B_1C_1 відповідно. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки M, N, K, і побудуйте проекцію цієї площини на площину (ABC). Обчисліть площі перерізу та проекції, якщо $AB = a$. Знайдіть кут між цими площинами.

669. Якщо проекція прямої AB на площину α утворює з прямими AC і AD цієї площини рівні кути, то і пряма AB з прямими AC і AD утворює рівні кути. Доведіть це.

670. Через вершину B кута ABC проведено промінь BM, який утворює з BA і BC рівні кути. Доведіть, що проекція точки M на площину кута лежить на бісектрисі цього кута.

671. Через вершину C трикутника ABC проведено похилу CM, яка утворює зі сторонами AC і BC рівні кути. M_1 – проекція точки M на площину (ABC), $M_1 \in AB$. Знайдіть довжину похилої та її проекцію, якщо $AB = 13$ см, $BC = 18$ см, $AC = 21$ см, $MM_1 = 4\sqrt{15}$ см.

672. Через вершину прямого кута C трикутника ABC проведено похилу CM, яка утворює зі сторонами AC і BC рівні кути. N – проекція M на площину трикутника, $N \in AB$. Знайдіть проекцію похилої CM, якщо проекції AM і BM дорівнюють відповідно 20 м і 15 м.

673. У тетраедрі $ABCD$ $\angle ADB = \angle BDC = \angle ADC = 90°$. Доведіть, що ортогональною проекцією точки D на площину (ABC) є точка перетину висот (ортоцентр) трикутника ABC.

674. Доведіть, що проекція прямого кута на площину буде прямим кутом лише тоді, коли хоча б одна сторона кута паралельна площині проекцій.

675. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть площу проекції цього тетраедра на площину, паралельну двом мимобіжним його ребрам.

676. Доведіть, що коли проекцією паралелепіпеда на площину є шестикутник, то кожна сторона цього шестикутника паралельна протилежній.

677*. Доведіть, що проекцією куба на площину, перпендикулярну до його діагоналі, є правильний шестикутник. Знайдіть площу цього шестикутника, якщо ребро куба дорівнює a.

678*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що проекції точок B і B_1 на діагональ AC_1 ділять цю діагональ на три рівні частини.

11-Geometrija.10kl.

679*. Доведіть, що квадрат площі трикутника дорівнює сумі квадратів площ його проекцій на три взаємно перпендикулярні площини.

Вправи для повторення

680. Через точку перетину прямих AB і AC проведено пряму l, яка не лежить з ними в одній площині. Доведіть, що прямі l і BC не перетинаються.

681. AP – перпендикуляр до площини паралелограма $ABCD$, $PC \perp BD$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.

682. З точок A і B, які лежать у перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AC і BD на пряму CD перетину цих площин. Знайдіть довжину AB, якщо $AC = a$, $CD = b$, $BD = c$.

§ 17 ВІДСТАНІ МІЖ ФІГУРАМИ

Що таке відстань між точками, нам уже відомо. Узагальнимо це поняття для випадку довільних фігур.

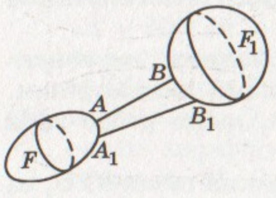
Нехай дано дві фігури F і F_1 (мал. 216). Точки $A \in F$ і $B \in F_1$ називають найближчими точками цих фігур, якщо для будь-яких точок $A_1 \in F$ і $B_1 \in F_1$ виконується нерівність $AB \le A_1B_1$.

Відстанню між двома фігурами називають відстань між найближчими точками цих фігур (якщо такі точки існують). Якщо дві фігури мають спільні точки, то вважають, що відстань між ними дорівнює 0.

ЗАУВАЖЕННЯ. Не будь-які дві фігури мають найближчі точки. Про це дізнаєтеся згодом, а поки ми вивчатимемо тільки такі фігури, для яких найближчі точки існують.

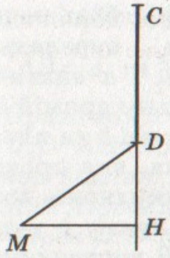
Розглянемо конкретні приклади.

Відстань від точки до прямої. Перпендикуляр, опущений з точки на пряму, коротший від будь-якого відрізка, що сполучає цю точку з даною прямою. Тому **відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.**

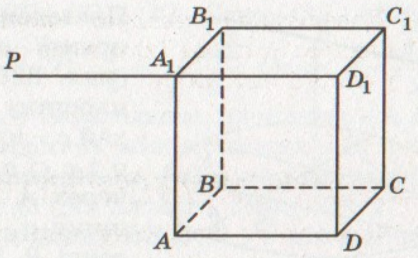


Мал. 216

Відстань від точки до відрізка не завжди дорівнює відстані від точки до



Мал. 217



Мал. 218

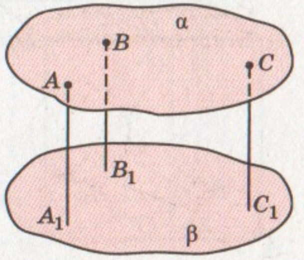
прямої, якій належить цей відрізок. Вона може дорівнювати відстані від даної точки до кінця відрізка. Подивіться на малюнок 217. Відстань від точки M до відрізка DC дорівнює MD, а не MH.

Відстань від точки до площини. Оскільки перпендикуляр коротший від похилої (теорема 19), то **відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину.** Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a, то відстань від точки A_1 до площини грані $ABCD$ дорівнює a. Але якщо A_1 – середина відрізка D_1P, то відстань від точки P до квадрата $ABCD$ дорівнює $a\sqrt{2}$ (мал. 218). Взагалі, відстань від точки до плоскої фігури не завжди дорівнює відстані від цієї точки до площини, в якій лежить дана фігура.

Відстань між паралельними площинами. Якщо площини α і β паралельні, то перпендикуляри, опущені з точок однієї з цих площин на другу, рівні (мал. 219). Справді, всі ці перпендикуляри паралельні один одному, а відрізки паралельних прямих, які відтинаються паралельними площинами, рівні (теорема 10). **Довжина перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки площини на паралельну їй площину, є відстанню між даними паралельними площинами.**

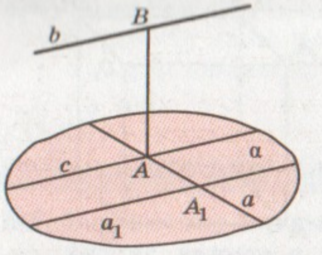
З тієї самої причини *відстань між прямою і паралельною їй площиною* дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої на дану площину.

Відстань між паралельними прямими дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки однієї прямої на другу.



Мал. 219

Відстань між мимобіжними прямими. Нехай дано мимобіжні прямі a і b.



Мал. 220

Проведемо через яку-небудь точку A_1 прямої a пряму a_1, паралельну b (мал. 220). Прямі a_1 і a визначають площину α, паралельну прямій b. Нехай c – проекція прямої b на площину α і $c \cap a = A$. Пряма, яка проходить через A і перпендикулярна до площини α, перетинає пряму b у деякій точці B. Відрізок AB перпендикулярний до кожної з даних мимобіжних прямих a і b, його називають *спільним перпендикуляром мимобіжних прямих*. Для будь-яких мимобіжних прямих існує єдиний їх спільний перпендикуляр. Спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих коротший від будь-якого відрізка, що сполучає довільні точки цих прямих. Тому *відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра*.

Корисно пам'ятати таке. Дві мимобіжні прямі визначають пару паралельних площин (див. задачу 296). Відстань між цими площинами дорівнює відстані між даними прямими.

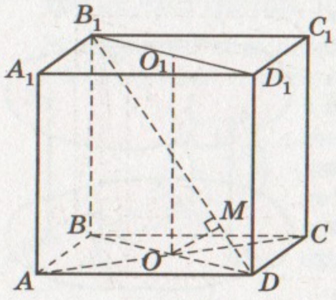
Отже, відстань між мимобіжними прямими можна знайти кількома способами:

1) побудувати спільний перпендикуляр до даних мимобіжних прямих. Його довжина дорівнює шуканій відстані;

2) через одну з мимобіжних прямих a провести площину α, паралельну прямій b і знайти відстань від довільної точки прямої b до площини α або до ортогональної проекції прямої b на площину α. Ця відстань і буде шуканою;

3) через дані мимобіжні прямі провести паралельні площини і знайти відстань між цими площинами. Це і буде шукана відстань.

Проілюструємо всі ці способи при розв'язуванні задачі. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a (мал. 221). Знайдіть відстань d між прямими: а) BB_1 і CD; б) CC_1 і B_1D; в) AB_1 і CD_1; г) AC і B_1D.



Мал. 221

а) Оскільки $BC \perp BB_1$ і $BC \perp CD$, то BC – спільний перпендикуляр прямих BB_1 і CD, тому відстань між ними дорівнює довжині відрізка BC. Отже, $d = a$.

б) Через пряму B_1D проведемо площину BB_1D_1D, яка паралельна CC_1, оскільки $CC_1 \parallel BB_1$. Знайдемо відстань від точки C до площини BB_1D_1D. Ця відстань дорівнює довжині відрізка CO. Дійсно, $CO \perp BD$ і $CO \perp OO_1$. Отже, $CO \perp (BB_1D)$. Якщо $AB = a$, то $AC = a\sqrt{2}$, тоді $CO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Отже, $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

в) Прямі AB_1 і CD_1 лежать у паралельних площинах AA_1B_1B і CC_1D_1D відповідно. Тому відстань між прямими AB_1 і CD_1 дорівнює відстані між цими площинами, тобто довжині відрізка AD, який перпендикулярний до цих площин. Отже, $d = a$.

г) Через B_1D проведемо площину BB_1D_1D і в цій площині проведемо $OM \perp B_1D$. OM – спільний перпендикуляр до прямих AC і B_1D. Дійсно, $AC \perp BD$ і $AC \perp OO_1$, тоді $AC \perp (BB_1D_1)$. Оскільки $OM \subset (BB_1D_1)$, то $AC \perp OM$. $OM \perp B_1D$ за побудовою. Отже, відстань між даними прямими дорівнює довжині відрізка OM.

$\triangle MOD \sim \triangle BB_1D$, тоді $\frac{OM}{OD} = \frac{BB_1}{B_1D}$, звідси $OM = \frac{OD \cdot BB_1}{B_1D}$.

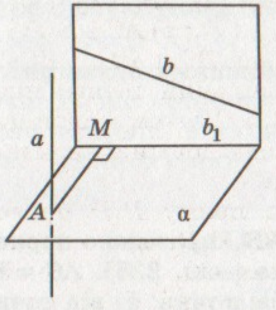
Оскільки $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $B_1D = a\sqrt{3}$, то $OM = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{2 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Отже, $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

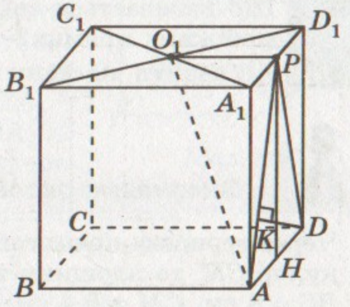
Для допитливих

Інколи для знаходження відстані між мимобіжними прямими зручно користуватися методом ортогонального проектування. Нехай a і b – мимобіжні прямі (мал. 222). Побудуємо площину α, перпендикулярну до прямої a, і спроектуємо на площину α пряму b. Отримаємо пряму b_1. У площині α з точки A проведемо $AM \perp b_1$. Оскільки площина, яка проходить через b і b_1, перпендикулярна до α, то вона паралельна a. Отже, відстань між мимобіжними прямими a і b дорівнює довжині перпендикуляра AM.

ЗАДАЧА 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a (мал. 223). Знайдіть відстань між прямими O_1A і CD, де O_1 – центр грані $A_1B_1C_1D_1$.



Мал. 222

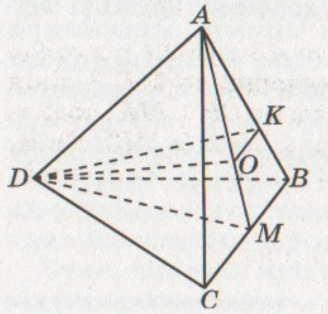


Мал. 223

Оскільки $CD \perp (AA_1D_1)$, то спроектуємо O_1A на площину (AA_1D_1). Отримаємо відрізок AP. У площині (AA_1D_1) проведемо $DK \perp AP$. Довжина DK і є шукана відстань. Розглянемо $\triangle APD$. Якщо H – середина AD, то, використовуючи метод площ, отримаємо, що $AD \cdot PH = AP \cdot DK$, звідси $DK = \dfrac{AD \cdot PH}{AP}$. Оскільки $AD = PH = a$ і

$$AP = \sqrt{AA_1^2 + A_1P^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \text{ то } DK = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

ЗАДАЧА 2. Точка K ділить ребро AB правильного тетраедра $ABCD$ у відношенні $AK : KB = 2 : 1$. Знайдіть відстань між DK і BC, якщо $AB = a$ (мал. 224).



Мал. 224

Нехай M – середина BC. Проведемо площину (ADM). Оскільки $DM \perp BC$ і $AM \perp BC$, то $BC \perp (ADM)$. Спроектуємо DK на площину (ADM). Оскільки тетраедр правильний, то центр O грані ABC лежить на AM і $AO : OM = AK : KB = 2 : 1$.

Отже, проекцією точки K буде точка O. Тоді шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного у площині (ADM) з точки M до DO, тобто довжині MO. Якщо $AB = a$, то

$$OM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається відстанню між двома фігурами?

2. Дайте означення відстані від точки до: а) прямої; б) відрізка; в) площини.

3. Як знайти відстань між паралельними площинами? А між прямою і паралельною їй площиною?

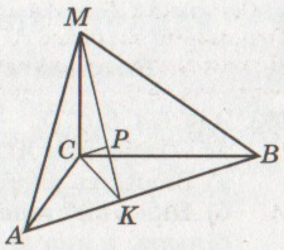
4. Що називається спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих?

5. Як знайти відстань між мимобіжними прямими?

Виконаємо разом

1. Через вершину прямого кута C $\triangle ABC$ проведено перпендикуляр CM до площини трикутника (мал. 225). $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $CM = 6,4$ см. Знайдіть відстань: а) від точки M до прямої AB; б) від точки C до площини (AMB).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. а) Проведемо $CK \perp AB$ і точку K сполучимо з точкою M. За теоремою про три перпендикуляри $MK \perp AB$. Отже, довжина відрізка MK – відстань від точки M до AB.



Мал. 225

З $\triangle ABC$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $AB = 10$ см. Тоді за методом площ $CK = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$.

З $\triangle MCK$ за теоремою Піфагора знайдемо MK:

$$MK = \sqrt{MC^2 + CK^2} = \sqrt{6,4^2 + 4,8^2} = 8.$$

б) Оскільки $KC \perp AB$ і $KM \perp AB$, то $AB \perp (MKC)$, а отже, площини (AMB) і (MKC) перпендикулярні, то MK – лінія їх перетину. У площині (MKC) проведемо $CP \perp MK$, тоді за властивістю перпендикулярних площин $CP \perp (AMB)$. Отже, CP – відстань від точки C до площини (AMB). Знайдемо її. З $\triangle MCK$ за методом площ:

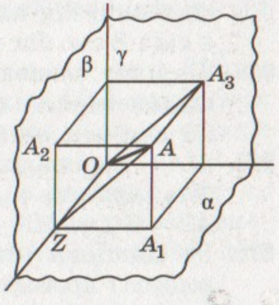
$$CP = \frac{CK \cdot CM}{KM} = \frac{4,8 \cdot 6,4}{8} = 3,84.$$

Отже, $CP = 3,84$ см.

Відповідь:
а) $MK = 8$ см;
б) $CP = 3,84$ см.

2. Кожна з трьох попарно перпендикулярних площин проходить через точку O. Точка A віддалена від цих площин на 90 см, 120 см і 80 см. Знайдіть відстань OA.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $AA_1 = 80$ см, $AA_2 = 90$ см і $AA_3 = 120$ см – відстані від даної точки A до площин α, β і γ (мал. 226). Площина, яка проходить через точки A, A_1 і A_2, перетинає пряму перетину площин α і β у такій точці Z, що чотирикутник AA_1ZA_2 – прямокутник. Чотирикутник AA_3OZ теж прямокутник. За теоремою Піфагора:



Мал. 226

$$OA = \sqrt{AA_3^2 + AZ^2} = \sqrt{AA_3^2 + AA_2^2 + AA_1^2} =$$
$$= \sqrt{120^2 + 90^2 + 80^2} = 170.$$

Відповідь: 170 см.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

683. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a, M – середина AD (мал. 227).

а) Знайдіть відстані AC, MC, MD_1.

б) Яка з відстаней AC, MC, BC найбільша, а яка найменша?

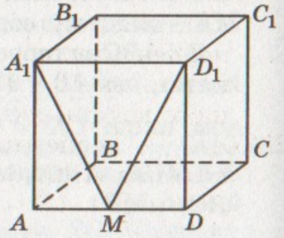
в) Порівняйте відстані MC, MD_1, MA_1.

г) Знайдіть відстань від точки M до прямих A_1D_1, B_1C_1, до площин $A_1B_1C_1D_1$, DD_1C_1C.

ґ) Знайдіть відстань між площинами $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.

д) Знайдіть відстань від прямої A_1M до площини BB_1C_1C.

е) Знайдіть відстань між прямими AD і B_1C_1, CC_1 і A_1D_1.



Мал. 227

А

684. Через середину відрізка AB проведено площину. Доведіть, що відстані від точок A і B до даної площини рівні.

685. Через діагональ паралелограма проведено площину. Доведіть, що кінці другої діагоналі однаково віддалені від цієї площини.

686. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 7 см і 13 см. Як віддалена від площини середина відрізка?

687. Точки C і D, які ділять відрізок AB на три рівні частини, віддалені від площини, що не перетинає відрізок AB, на 4 см і 8 см. Як віддалені від площини кінці відрізка?

688. Відрізок завдовжки a перетинає площину, а його кінці віддалені від площини на b і c. Знайдіть довжину проекції відрізка на площину.

689. MA – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки M до прямих AB, BC і BD, якщо $AB = 3$ дм, $MA = 4$ дм.

690. До площини трикутника з центра вписаного в нього кола радіуса r проведено перпендикуляр завдовжки h. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до сторін трикутника.

691. З вершини B рівнобедреного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр $BK = 12$ см. Знайдіть відстань від точки K до сторони AC, якщо $AC = 24$ см, $AB = BC = 20$ см.

692. З вершини B рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) до його площини проведено перпендикуляр BM. Відстань від точки M до сторони AC дорівнює 15 см, а до точки A – $3\sqrt{34}$ см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

693. З центра O кола, описаного навколо прямокутного трикутника з кутом 30°, до площини трикутника проведено перпендикуляр OK. Точка K віддалена від більшого катета на 10 см. Знайдіть відстань від точки K до меншого катета, якщо $OK = 8$ см.

694. AK – перпендикуляр, проведений до площини трикутника ABC. Знайдіть відстань від точки K до сторони BC, якщо $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $AK = 16$ см.

695. Через вершину B трикутника ABC проведено перпендикуляр BM до площини трикутника. Точка M рівновіддалена від вершин A і C. Знайдіть відстань від точки M до сторони AC, якщо $AC = a$, $BM = \frac{a}{2}$, $\angle B = 60°$.

696. Периметр трикутника ABC дорівнює 96 см, $AC = 36$ см. Через вершину B проведено перпендикуляр BP до площини трикутника, $PA = PC = 50$ см. Знайдіть відстань: а) від P до площини трикутника ABC; б) від точки B до площини трикутника APC.

697. Точка M знаходиться на відстані 26 см від усіх сторін прямокутного трикутника. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо його висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні $9:16$.

698. Точка R знаходиться на відстані $2a$ від усіх сторін правильного трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки R до площини трикутника.

699. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Точка простору O знаходиться на відстані 12,5 см від усіх сторін трикутника. Знайдіть відстань від O до площини трикутника.

700. Більша діагональ ромба дорівнює d, а гострий кут α. Точка простору M рівновіддалена від сторін ромба і знаходиться на відстані $2d$ від його площини. Знайдіть відстань від точки M до сторін ромба.

701. З точки P до площини проведено дві рівні похилі PM і PN, кут між якими 60°, а кут між їх проекціями 120°. Знайдіть відстань від точки P до площини і до прямої MN, якщо $MN = a$.

702. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 17 м і 10 м. Різниця проекцій цих похилих 9 м. Знайдіть відстань від даної точки до площини.

703. Точка A віддалена від однієї з двох перпендикулярних площин на x, а від другої – на y. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину даних площин.

704. Площина α проходить через сторону AB паралелограма $ABCD$ і віддалена на d від точки перетину його діагоналей. Знайдіть відстань від прямої CD до площини α.

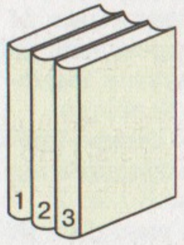
705. Вершини A, B, C квадрата $ABCD$ віддалені від площини, яка не перетинає його, на 13 м, 14 м і 17 м відповідно. Як віддалені від площини центр квадрата і вершина D?

706. Вершини трикутника віддалені від площини, яка не перетинає його, на 6 м, 8 м і 10 м відповідно. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до площини.

707. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань від його вершини до протилежної грані.

708. Дві вершини трикутника і точка перетину медіан віддалені від площини, яка не перетинає його, на 40 см, 24 см і 38 см відповідно. Знайдіть відстань від третьої вершини до площини.

709. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 40 см. Відрізок завдовжки 50 см своїми кінцями впирається в ці площини. Знайдіть довжини проекцій відрізка на кожну з площин.



Мал. 228

710. ***ЗАДАЧА З НЕСПОДІВАНОЮ ВІДПОВІДДЮ.*** На книжковій полиці стоїть тритомник (мал. 228). Товщина кожної книжки 40 мм, а книжки без обкладинки 35 мм. Знайдіть відстань від першої сторінки першого тому до останньої сторінки третього тому.

711. З точки K, розміщеної по один бік від паралельних площин α і β, проведено дві прямі, які перетинають α у точках A і C, а β – у точках B і D відповідно. Знайдіть відстань між площинами, якщо точка K віддалена від β на 14 м, $AK = 9$ м, $CD = 16$ м, $KC = AB$.

712. Через точку O, яка лежить між паралельними площинами α і β, проведено дві прямі, які перетинають α у точках A і C, а β – у точках B і D відповідно. $AO = OD$, $OC = 18$ м, $OB = 32$ м. Знайдіть відстань між площинами, якщо точка O віддалена від β на 16 м.

713. M, N, K середини ребер PA, PB, PC правильного тетраедра $PABC$. Знайдіть відстань між площинами (MNK) і (ABC), якщо $AB = a$.

714. AK – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, $AB = a$, $AK = 2a$. Знайдіть відстань між прямими KB і CD, KB і AD.

715. Ребро куба дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між діагоналлю куба і мимобіжною з нею діагоналлю основи.

716. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть відстань між CC_1 і BD.

717. Ребро правильного тетраедра a. Знайдіть відстань між його протилежними ребрами.

718. Ребро куба a. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями його протилежних граней.

719. Знайдіть відстань між діагоналлю куба, ребро якого дорівнює a, і будь-яким ребром, мимобіжним з цією діагоналлю.

Б

720. Діагоналі ромба $ABCD$ дорівнюють 30 см і 40 см. З вершини A до площини ромба проведено перпендикуляр AK. Знайдіть відстань від точки K до сторін ромба та до прямих, які містять сторони ромба, якщо $AK = 10$ см.

721. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи у відношенні 5 : 4, бічна сторона трикутника дорівнює 60 см. Точка M рівновіддалена від сторін трикутника і знаходиться на відстані 12 см від площини трикутника. Знайдіть відстань від точки M до сторін трикутника.

722. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 18 см. Точка P віддалена від сторін трапеції на 10 см. Знайдіть відстань від P до площини трапеції.

723. Центр кола, вписаного в трапецію, віддалений від кінців бічної сторони на 30 см і 40 см. Точка S віддалена від сторін трапеції на 26 см. Знайдіть відстань від точки S до площини трапеції.

724. Точка простору рівновіддалена від двох сторін трикутника і перпендикуляр, проведений через цю точку до площини трикутника, перетинає третю сторону. Доведіть, що основа цього перпендикуляра лежить на бісектрисі кута трикутника.

725. $MK = 2$ см – перпендикуляр, проведений з точки M до площини трикутника ABC ($\angle C = 90°$), $K \in AB$. Точка M рівновіддалена від сторін AC і BC. Знайдіть відстань від точки M до катетів трикутника, які дорівнюють 6 см і 8 см.

726. Точка P рівновіддалена від сторін AB і BC трикутника ABC, PK – перпендикуляр до площини трикутника, $K \in AC$. Знайдіть відстань від точки P до сторін AB і BC, якщо $PK = 4\sqrt{5}$ см, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$.

727. У трикутнику ABC $AB = 15$ см, $BC = 21$ см, $AC = 24$ см. MN – перпендикуляр до площини трикутника, $N \in AC$, а точка M віддалена від сторін AB і BC на 10 см. Обчисліть відстань від точки M до площини трикутника.

728. У прямокутному трикутнику дано гіпотенузу c і гострий кут, що дорівнює 30°. Визначте відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу і нахилена до площини даного трикутника під кутом 45°.

729. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона пропорційні числам 6 і 7. Вершини основи трикутника віддалені від площини, яка не перетинає трикутник, на 20 см і 12 см, а центр вписаного кола на 19 см. Знайдіть відстань від третьої вершини трикутника до цієї площини.

730. Середня лінія трапеції паралельна площині α і віддалена від неї на 12 см, а точка перетину діагоналей віддалена від α на 10 см. Знайдіть відстань від основ трапеції до площини α, якщо основи трапеції відносяться як 1 : 3 і площина α трапецію не перетинає.

731. Діагоналі A_1C і BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O. Знайдіть відстань від точки O до площини (AB_1D_1), якщо ребро куба дорівнює a.

732. $ABCD$ і ABC_1D_1 – квадрати, $AB = a$, $\angle CBC_1 = \alpha$. Знайдіть відстань між відрізками: а) DC і BC_1; б) DC і D_1C_1.

733. У тетраедрі $PABC$ $AP = PC$, $AB = BC$, $AC = 20$ см, $PB = 25$ см. Знайдіть відстань між AC і PB, якщо площі трикутників APC і ABC дорівнюють відповідно 250 см^2 і 300 см^2.

734. $PABC$ – правильний тетраедр з ребром a, O – проекція точки P на площину ABC. Знайдіть відстань між BC і: а) PO; б) PL – бісектрисою грані APC; в) AM – медіаною грані APC.

735. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямий паралелепіпед, $A_1B = 25$ м, $AD = 13$ м, $AA_1 = 20$ м, $BD = 14$ м. Знайдіть відстань між DD_1 і A_1B.

736. Прямі a, b мимобіжні і лежать у перпендикулярних площинах α і β. Пряма a перпендикулярна до лінії перетину площин. Відстань від точки M ($M \in a$) до площини β дорівнює m, а до прямої b – n. Знайдіть відстань між прямими a і b.

737. Площини рівностороннього трикутника ABC і рівнобедреного трикутника ABD ($AD = BD = 10$ см, $AB = 16$ см) перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими AB і CD.

738. У правильному тетраедрі $ABCD$ з ребром a точка O – проекція точки D на площину ABC, F і E – середини ребер BD і CD відповідно. Знайдіть відстань між прямими: а) AD і BC; б) AC і EF; в) OD і EF; г) AD і EF.

739*. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней куба, ребро якого дорівнює a.

740. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від сторін трикутника.

741*. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від прямих, на яких лежать сторони трикутника.

742*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a. Знайдіть відстань між тетраедрами $AA_1B_1D_1$ і C_1CBD.

Вправи для повторення

743. Ортогональною проекцією трикутника є прямокутний трикутник з гіпотенузою 15 см і катетами, які пропорційні числам 3 і 4. Кут між площинами цих трикутників 30°. Знайдіть площу даного трикутника. Чи може цей трикутник бути правильним?

744. Чи можуть бути паралельними прямі, утворені при перетині двох площин, що перетинаються, третьою площиною?

745. $ABCD$ – правильний тетраедр, $AB = a$, O – точка перетину медіан трикутника ABC. Знайдіть площу перерізу тетраедра площиною, яка перпендикулярна до відрізка OD і проходить через його середину.

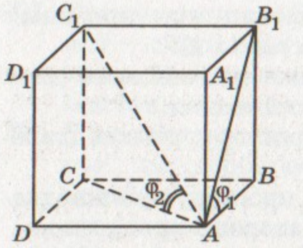
§ 18 КУТИ В СТЕРЕОМЕТРІЇ

Вище ми розглянули випадки розташування прямої і площини: пряма лежить у площині; пряма паралельна площині; пряма перпендикулярна до площини. Залишається дослідити випадок, коли пряма перетинає площину, але не перпендикулярна до неї. Такі прямі можуть бути нахилені до площини під різними кутами.

Що розуміють під кутом між прямою і площиною?

Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між такою прямою і площиною дорівнює 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, кут між ними дорівнює 90°. У решті випадків *кутом між прямою і площиною називають кут між прямою і її проекцією на площину*.

Якщо φ – кут між прямою і площиною, то $0° \le \varphi \le 90°$.



Мал. 229

ПРИКЛАД. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 229). Під якими кутами нахилені до площини його грані $ABCD$ прямі AB_1 і AC_1?

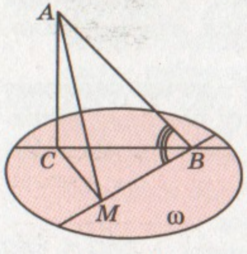
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проекції відрізків AB_1 і AC_1 на площину грані $ABCD$ – відрізки AB і AC. Тому шукані кути: $\varphi_1 = \angle B_1AB$ і $\varphi_2 = \angle C_1AC$, $\varphi_1 = 45°$, оскільки ΔABB_1 – прямокутний і рівнобедрений.

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{CC_1}{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707, \text{ звідси } \varphi_2 \approx 35°16'.$$

Кутом між похилою і площиною називають кут між похилою і її проекцією на дану площину. Якщо φ – кут між похилою і площиною, то $0° < \varphi < 90°$.

!

Теорема 22. ***Кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.***



Мал. 230

ДОВЕДЕННЯ. Нехай AB – похила, AC – перпендикуляр до площини ω, BM – будь-яка відмінна від BC пряма площини ω, $\angle ABM$ – кут між прямими AB і BM. Доведемо, що $\angle ABC < \angle ABM$ (мал. 230).

Якщо прямі BM і BC не перпендикулярні, то опустимо перпендикуляр CM на BM і проведемо відрізок AM. За теоремою про три перпендикуляри $AM \perp MB$. Отже,

$$\sin \angle ABC = \frac{AC}{AB}, \ \sin \angle ABM = \frac{AM}{AB}.$$

Оскільки $AC < AM$, то $\sin \angle ABC < \sin \angle ABM$. Розглянуті кути не перевищують 90°, тому $\angle ABC < \angle ABM$.

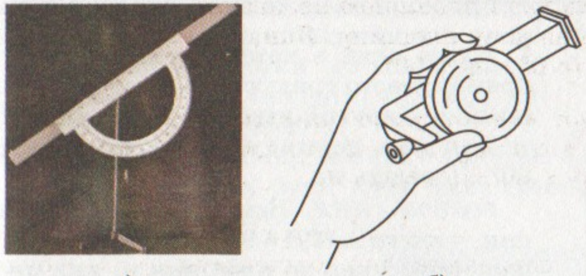
Якщо $BM \perp BC$, то за теоремою про три перпендикуляри $\angle ABM = 90°$. Кут ABC менший від 90°. Отже, і в цьому випадку $\angle ABC < \angle ABM$. Теорему доведено.

Поняття кута між прямою або похилою і площиною використовується багатьма фахівцями. Під певними кутами до площини горизонту споруджують ескалатори на станціях метро, шахтні уклони, фунікулери, похилі мости доменних печей і багато інших споруд. Під різними кутами до площини аеродрому злітають літаки.

Для допитливих

Кути між прямими і площинами часто доводиться вимірювати астрономам, геодезистам, географам, маркшейдерам, працівникам транспорту. Найпростіший саморобний прилад для вимірювання кутів між горизонтальною площиною і похилими – *екліметр* (мал. 231, *а*).

Бувають екліметри і фабричного виготовлення (мал. 231, *б*). Якщо потрібна більша точність, користуються *теодолітом* (мал. 232). Теодоліт має два круги з градусними поділками (лімби). Користуючись горизонтальним лімбом, визначають кути у горизонтальній площині, вертикальний лімб дає змогу вимірювати кут між горизонтальною площиною і похилими до неї напрямами.

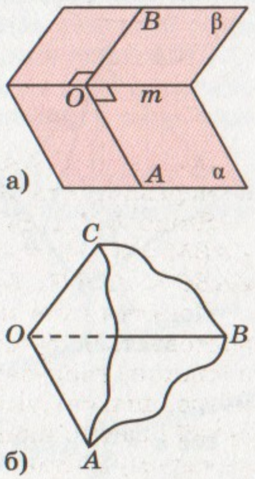

а) б)
Мал. 231


Мал. 232

Крім відомих вам геометричних понять *кут, кут між прямими, кут між площинами, кут між прямою і площиною*, у стереометрії розглядають ще кілька понять, назви яких містять слово «кут»: *двогранний кут, тригранний кут, многогранний кут, тілесний кут, кут між векторами* тощо.

Двогранним кутом називають частину простору, обмежену двома півплощинами, які виходять з однієї прямої (мал. 233, *а*). Цю пряму називають *ребром* двогранного кута. Дві площини, які виходять з однієї прямої, також називають двогранним кутом. Перерізом двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра, є кут. Його називають *лінійним кутом* даного двогранного кута.

Тригранним кутом називають частину простору, обмежену трьома плоскими кутами, кожні два з яких мають спільну сторону (мал. 233, *б*). Кожний тетраедр має 6 двогранних кутів і 4 тригранні, а куб – 12 двогранних і 8 тригранних.

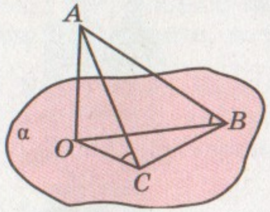


Мал. 233

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке кут між прямою і площиною?
2. Яким може бути кут між прямою і площиною?
3. Що таке кут між похилою і площиною?
4. Сформулюйте теорему про кут між похилою і площиною.
5. Якими приладами вимірюють кут між прямою і горизонтальною площиною?

Виконаємо разом

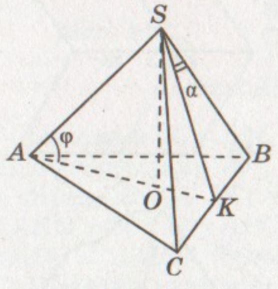


Мал. 234

1. Якщо один з катетів рівнобедреного прямокутного трикутника лежить у площині α, а другий утворює з нею кут $45°$, то кут між гіпотенузою і площиною – $30°$. Доведіть це.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай ABC – трикутник, у якого $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$, а AO – перпендикуляр до площини α, яка проходить через BC (мал. 234). Доведемо, що коли $\angle ACO = 45°$, то $\angle ABO = 30°$. Нехай $AC = a$, тоді $BC = a$, $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $AB = a\sqrt{2}$, $\sin \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

Отже, $\angle ABO = 30°$.



Мал. 235

2. $SABC$ – правильна трикутна піраміда, $\angle BSC = 2\alpha$. Знайдіть кут нахилу бічного ребра піраміди до площини основи.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $SABC$ – правильна трикутна піраміда (мал. 235), у якої $\angle BSC = 2\alpha$. Знайдемо $\angle SAO = \varphi$.

Проведемо $SK \perp BC$. Нехай $BC = a$, тоді з $\triangle SKB$ $SB = \frac{BK}{\sin\alpha}$, $SB = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

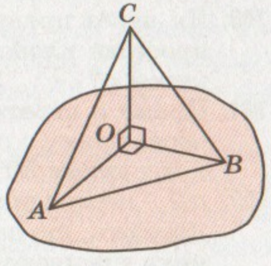
Оскільки $\triangle ABC$ – правильний, то $OA = \frac{2}{3}AK$, $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, отже, $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{OA}{SA}, \quad \cos\varphi = \frac{a\sqrt{3}\cdot 2\sin\alpha}{3a} = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}.$$

Отже, $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}$, а $\varphi = \arccos\frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно



Мал. 236

746. Відрізки OA, OB, OC рівні і попарно перпендикулярні (мал. 236). Знайдіть: а) кути $\triangle ABC$; б) кут між площиною (AOB) та прямими AC, BC, OC; в) кут між площиною (AOC) та прямими AB і BC.

747. Скільки прямих, які перетинають дану площину під кутом $50°$, можна провести через дану точку?

748. Під яким кутом до площини потрібно провести відрізок MN, щоб він був удвічі більший за свою проекцію?

749. Кут між перпендикуляром і похилою, проведеними до площини α, дорівнює $40°$. Знайдіть кут між похилою і площиною α.

750. Нехай на малюнку 236 $OA = OB = OC = 10$ см. Прикиньте, якими можуть бути кути між прямими OA, OB, OC і площиною $\triangle ABC$.

А

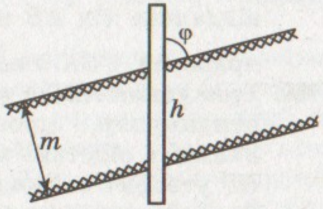
751. Пряма AB з площиною α утворює кут $60°$. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α, якщо $AB = 48$ см.

752. Довжина похилої AB дорівнює 50 см, а точка A віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.

753. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, виміри якого $AB = a$, $AA_1 = b$, $AD = c$. Знайдіть тангенси кутів нахилу прямих AB_1, AD_1, AC_1 до площини грані $ABCD$.

754. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом φ, то і другу площину вона перетинає під таким самим кутом.

755. Доведіть, що паралельні прямі нахилені до однієї і тієї самої площини під рівними кутами. Чи правильне обернене твердження?



Мал. 237

756. Визначте товщину m вугільного пласта, якщо вертикальна свердловина нахилена до нього під кутом $\varphi = 72°$ і проходить по вугіллю відстань $h = 2{,}5$ м (мал. 237).

757. На якій глибині знаходиться станція метро, якщо її ескалатор завдовжки 85 м нахилений до площини горизонту під кутом $42°$?

12-Geometrija.10kl.

758. Одна з двох прямих, що перетинаються під кутом 50°, перпендикулярна до деякої площини. Доведіть, що і друга пряма перетинає цю площину. Знайдіть кут між другою прямою і площиною.

759. Знайдіть кут між мимобіжними прямими, якщо одна з них перпендикулярна до деякої площини, а друга перетинає цю площину під кутом φ.

760. Як через пряму, що перетинає площину α під кутом φ, провести площину, яка перетинає площину α також під кутом φ?

761. Пряма a перетинає площину α під кутом 45°. Чи можна через пряму a провести площину, яка перетинає площину α під кутом 30°? А під кутом 60°?

762. AH – перпендикуляр до площини трикутника ABC, $AB = AC$. Доведіть, що похилі HB і HC з площиною даного трикутника утворюють рівні кути.

763. Площина β проходить через вершини B і D ромба $ABCD$. Доведіть, що прямі AB, CB, AD і CD утворюють з площиною β рівні кути.

764. З однієї точки до площини проведено дві рівні похилі. Кут між ними 60°, а між їхніми проекціями 90°. Знайдіть кути між похилими і площиною.

765. З точки, віддаленої від площини на 8 дм, проведено дві похилі під кутами 45° до площини. Знайдіть відстань між їхніми основами, якщо кут між проекціями похилих 120°.

766. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 6 см, точка M знаходиться на відстані 6 см від кожної з його вершин. Знайдіть кут між прямою MA і площиною квадрата.

767. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює a, точка M віддалена від кожної з його вершин на $\frac{2}{3}a$. Під якими кутами нахилені прямі MA, MB і MC до площини трикутника ABC?

768. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника ABC дорівнює c. Через вершину прямого кута C до площини трикутника проведено перпендикуляр CK. Точка K віддалена від AB на $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кути, які утворюють прямі AK і BK з площиною трикутника.

769. Трикутник ABC – рівнобедрений, $\angle A = 120°$, $AP = a$ – перпендикуляр, проведений до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки P до сторони BC, якщо пряма BP утворює з площиною трикутника кут α.

770. Знайдіть кут між бічним ребром і площиною основи правильного тетраедра.

771. Усі ребра правильної чотирикутної піраміди рівні. Знайдіть кут між бічним ребром і площиною основи.

772. У тетраедрі $PABC$ $PA = PB = PC = c$. Знайдіть відстань від точки P до площини (ABC), якщо ребро PA утворює з площиною (ABC) кут α.

Б

773. Точка P знаходиться на відстані a від усіх вершин квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки P до площини квадрата і до його сторони, якщо пряма PA утворює з площиною квадрата кут α.

774. Точка M рівновіддалена від вершин правильного трикутника ABC і віддалена від площини трикутника на h. Знайдіть відстань від точки M до сторін трикутника, якщо кут між прямою MA і площиною (ABC) дорівнює α.

775. Точка простору M знаходиться на відстані 20 см від усіх вершин трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть периметр трикутника, якщо його площа дорівнює 96 см^2, а пряма MC утворює з площиною трикутника кут 60°.

776. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить квадрат. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює d і утворює з площиною основи кут β.

777. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

778. Кінці відрізка AB, які лежать у перпендикулярних площинах α і β, віддалені від лінії перетину площин c на 15 см і 6 см, а відстань між основами перпендикулярів, проведених з цих точок до прямої c, дорівнює 8 см. Знайдіть довжину відрізка AB та кути, які цей відрізок утворює з площинами α і β.

779. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах α і β. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок A і B до лінії перетину площин, якщо довжина відрізка AB дорівнює a і він утворює з площинами α і β кути 30° і 45°.

780. Висота і бічна сторона трапеції дорівнюють відповідно 12 см і 15 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Прямі, які проходять через вершини трапеції та деяку точку M, утворюють з площиною трапеції кути 45°. Знайдіть відстань від точки M до площини трапеції.

781. Точка простору P віддалена від вершин трапеції $ABCD$ на 4 см. Знайдіть кути, які утворюють з площиною трапеції прямі, що проходять через точку P і вершини трапеції, якщо $\angle A = 60°$, $AC = 2\sqrt{3}$ см.

782. У трикутнику ABC $AB = BC = a$, $\angle C = 30°$. MB – перпендикуляр до площини трикутника, $MB = a\sqrt{2}$. Знайдіть кут між прямою AM та площиною (MBC).

783. CK – перпендикуляр до площини трикутника ABC, у якого $AC = BC$, $\angle C = 120°$. Пряма AK утворює з площиною (ABC) кут α, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Знайдіть кут, який утворює пряма AK з площиною (KCB).

784. З однієї точки проведено до площини дві похилі, проекції яких дорівнюють 4,5 м і 1,5 м. Знайдіть довжини похилих, якщо одна з них утворює з площиною кут, удвічі більший, ніж друга.

785*. З однієї точки проведено до площини дві похилі, довжини яких 3 см і 8 см. Знайдіть проекції похилих на цю площину, якщо різниця кутів, утворених похилими з площиною, дорівнює 60°.

786. Дано площину ω і пряму AB, віддалену від неї на відстань a. Через точку A проведено прямі, перпендикулярні до AB, які утворюють з даною площиною кути 45° і 30° та перетинають цю площину в точках P і Q. Знайдіть довжину відрізка PQ.

787*. Через дві точки, які лежать у даній площині на відстані a, проведено паралельні похилі під кутом 45° до площини. Визначте відстань між ними, якщо відстань між їхніми проекціями на дану площину дорівнює b.

788*. У просторі дано три попарно мимобіжні прямі. Через одну з них проведіть площину так, щоб інші дві прямі були до неї однаково нахилені.

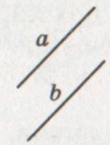
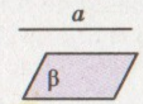
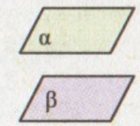
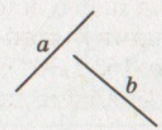
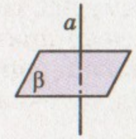
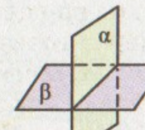
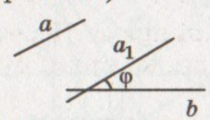
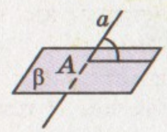
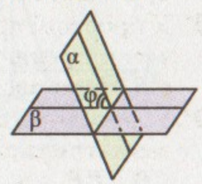
789*. У просторі дано площину α і дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок P площини α, для яких прямі AP і BP утворюють з площиною α рівні кути.

Вправи для повторення

790. Пряма a лежить у площині α, а пряма $b \perp \alpha$. Відстань від точки M ($M \in b$) до площини α дорівнює 4 см, а до прямої a – 5 см. Знайдіть відстань між прямими a і b.

791. $ABCD$ – правильний тетраедр з ребром a. Через центр O основи ABC проведено площину, яка паралельна BC і перетинає ребро AD у точці M. У яких межах можуть змінюватися периметр і площа утвореного перерізу залежно від положення точки M на ребрі AD?

792. Користуючись таблицею, перерахуйте всі можливі випадки розташування прямих і площин у просторі, сформулюйте їх найважливіші властивості.

	Пряма і пряма	Пряма і площина	Площина і площина
Паралельність	*О* *Т* $a \parallel b$ 	*О* *Т* $a \parallel \beta$ 	*О* *Т* $\alpha \parallel \beta$ 
Перпендикулярність	*О* *Т* $a \perp b$ 	*О* *Т* $a \perp \beta$ 	*О* *Т* $\alpha \perp \beta$ 
Інші випадки	*О* (кут між прямими)  *О* (мимобіжні прямі)	*О* (кут між прямою та площиною) *Т* *Т* 	*О* (кут між площинами) 

Тут *О* – означення, *Т* – теорема.

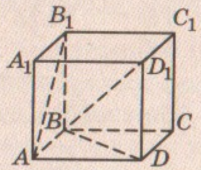
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

1

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

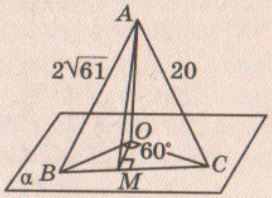
Знайдіть кут між прямими:
1) AB_1 і CD; 2) AB_1 і BD;
3) AB_1 і BC_1.



2

$AO \perp \alpha$
$BO : OC = 5 : 8$

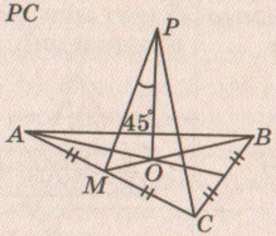
AM



3

$AB = BC = AC = 8$ см

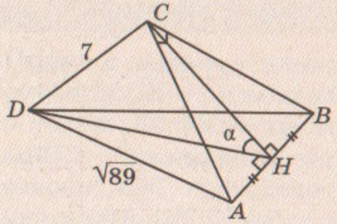
PM; PC



4

$AB = 10$; $\angle ACB = 90°$;
$AC = BC$

$\angle\alpha$

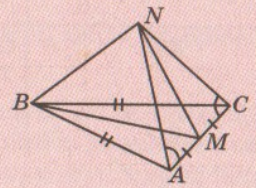


Б

1

$AB = BC$

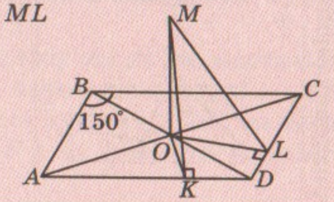
Доведіть: $BN \perp AC$



2

$ABCD$ – паралелограм,
$MO \perp (ABC)$, $AB = 24$ см,
$AD = 40$ см, $MO = 8$ см

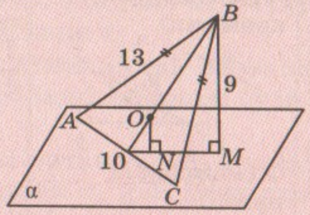
MK; ML



3

$BM \perp \alpha$; O – центр вписаного кола

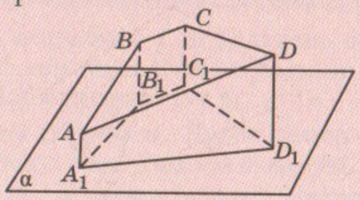
ON



4

$AD \parallel BC$, $AD : BC = 3 : 1$,
$AA_1 = 11$ см, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$,
$BB_1 = 21$ см, $AA_1 \perp \alpha$, $CC_1 = 23$ см

DD_1

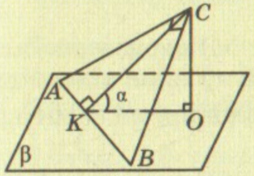


А

5

$CO \perp \beta$; $\angle ACB = 90°$;
$AC = 15$; $CB = 20$; $CO = 6$

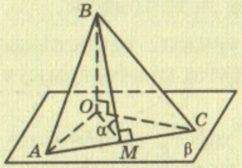
$\angle\alpha$



6

$BO \perp \beta$; $AB = BC = AC$;
$\angle OMB = 60°$

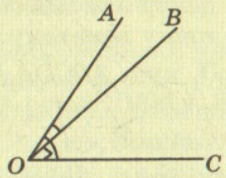
$\angle OAB$; $\angle OCB$



7

$\angle AOB = \angle AOC = 60°$;
$\angle BOC = 90°$

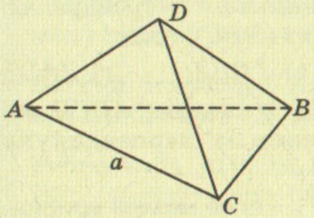
Кут між OA і (BOC)



8

$ABCD$ – правильний тетраедр; $AB = a$

Відстань між AD і BC

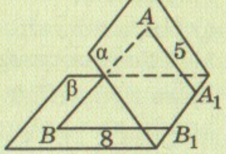


Б

5

$AB = 25$; $A_1B_1 = 24$

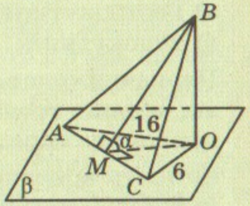
Кут між α і β



6

$BO \perp \beta$; $S_{ABC} = 48$ см^2;
$AC = 14$ см

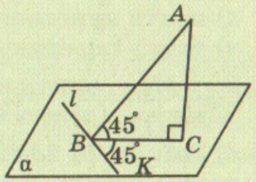
$\angle\alpha$



7

$AC \perp \alpha$

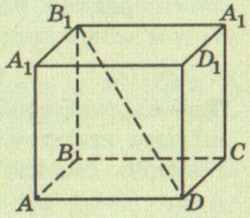
$\angle ABK$



8

$ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ – куб;
$AB = 8$ см

Відстань між AB і B_1D



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Дано три різні площини α, β, γ: $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$. Яке взаємне розташування площин α і γ?
а) Паралельні; б) перетинаються або паралельні; в) перпендикулярні; г) перпендикулярні або паралельні.

2. Дано $b \perp \alpha$, $b \parallel c$. Яке взаємне розташування площини α і прямої c?
а) Паралельні; б) перпендикулярні; в) перпендикулярні або паралельні; г) інша відповідь.

3. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яка з площин не перпендикулярна до площини (AA_1C_1)?
а) (BDD_1); б) (ABC); в) (BCC_1); г) $(A_1B_1C_1)$.

4. SA – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, O – точка перетину його діагоналей. Установіть вид трикутника SOD.
а) Гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) не можна встановити.

5. Перпендикуляр, проведений з точки, рівновіддаленої від вершин трикутника, до площини цього трикутника, проходить через:
а) центр вписаного кола; б) центр описаного кола; в) точку перетину медіан; г) точку перетину висот.

6. Перпендикуляр, проведений з точки, рівновіддаленої від сторін трикутника, до площини цього трикутника, проходить через:
а) центр вписаного кола; б) центр описаного кола; в) точку перетину медіан; г) точку перетину висот.

7. M і M_1 – середини ребер CD і C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть відстань між прямими AB_1 і MM_1, якщо $AB = 2a$.
а) $2a$; б) $2a\sqrt{2}$; в) $a\sqrt{5}$; г) $a\sqrt{3}$.

8. Ортогональною проекцією трикутника, площа якого 8 см^2, є рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Знайдіть кут між площинами трикутників.
а) 30°; б) 60°; в) 45°; г) 150°.

9. M – середина ребра BC правильного тетраедра $ABCD$. Кутом між площинами (ABC) і (DBC) є кут:
а) $\angle ACD$; б) $\angle DMA$; в) $\angle DBA$; г) $\angle ADM$.

10. Правильний трикутник ABM і квадрат $ABCD$ мають спільну сторону AB, а площини їх перпендикулярні. Знайдіть $\angle MAD$.
а) 60°; б) 90°; в) 120°; г) не можна встановити.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Ребро правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює α. Знайдіть периметр і площу перерізу тетраедра площиною, яка проходить через ребро AC перпендикулярно до BD.

2. Доведіть, що основа висоти піраміди збігається із центром кола, описаного навколо основи піраміди, якщо бічні ребра утворюють рівні кути з висотою піраміди.

3. З точки, що знаходиться на відстані 12 см від площини, проведено до цієї площини дві похилі, кут між якими 90°. Знайдіть кут між проекціями похилих, які дорівнюють 9 см і 16 см.

4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Точка M знаходиться на відстані 13 см від кожної його вершини. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

5. Основи трапеції дорівнюють 12 см і 20 см. Через більшу основу трапеції проведено площину α на відстані 16 см від меншої основи. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до площини α.

6. У тетраедрі $ABCD$ $AB = BC$, $\angle DBC = \angle DBA$. Доведіть, що $AC \perp DB$.

7. Кінці відрізка AB, довжина якого 24 см, належать площинам α і β, $\alpha \perp \beta$. Відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок A і B до лінії перетину площин, дорівнює 12 см. Знайдіть кут, який пряма AB утворює з площиною α, якщо з площиною β вона утворює кут 30°.

8. Сторони прямокутника 2 см і 6 см. Менша сторона прямокутника лежить у площині α, а його діагональ утворює з α кут 60°. Знайдіть кут між площиною прямокутника і площиною α.

9. Висоти тетраедра $ABCD$, проведені з вершин A і D, перетинаються. Доведіть, що $AD \perp BC$.

10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a, M – середина BB_1. Знайдіть кут і відстань між прямими AB_1 і DM.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 4

1 *Кут між прямими.* Кут між двома прямими, що перетинаються, – менший з утворених ними чотирьох кутів. Кут між паралельними прямими дорівнює 0°. Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, що перетинаються, і паралельні даним прямим.

2 Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює 90°. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.

3 Пряма називається *перпендикулярною до площини*, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої, що лежить у площині і проходить через точку перетину (означення). Якщо пряма перетинає площину і перпендикулярна до двох різних прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна і до площини (ознака перпендикулярності прямої і площини).

4 Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до неї. Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

5 *Перпендикуляром*, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.

6 Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до проекції похилої (теорема про три перпендикуляри).

7 *Кутом між прямою і площиною* називають кут між прямою і її проекцією на площину. Якщо пряма паралельна (перпендикулярна) площині, то кут між ними дорівнює 0° (90°). *Кутом між площинами* називають кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину. Кут між паралельними площинами дорівнює 0°.

8 *Дві площини називають перпендикулярними,* якщо кут між ними прямий. Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої, то такі площини перпендикулярні (ознака перпендикулярності площин).

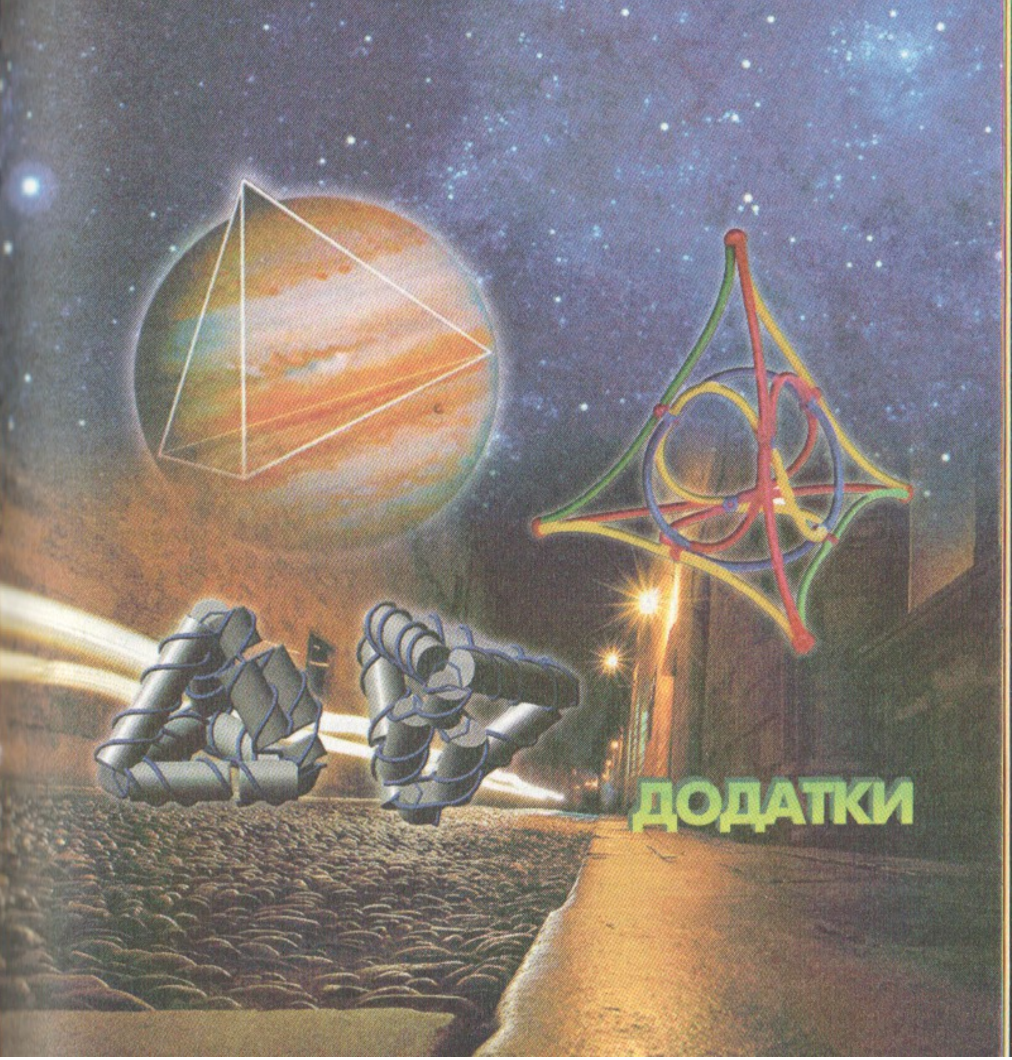
9 *Проектування* називають прямокутним, або ортогональним, якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій. Якщо S і $S_{пр}$ – площі многокутника і його ортогональної проекції, а кут між їх площинами φ, то

$$S_{пр} = S\cos\varphi.$$

Елементи геометрії тетраедра

Основні теми розділу:

- Середні лінії і медіани тетраедра.
- Прямі Чеви в тетраедрі.
- Перерізи тетраедра.
- Ортоцентричні тетраедри.
- Прямокутні тетраедри.



§ 19 СЕРЕДНІ ЛІНІЇ І МЕДІАНИ ТЕТРАЕДРА

1. Слово тетраедр походить від двох грецьких слів: τετρα – чотири і εδρα – грань. ***Тетраедром*** називають кожний многогранник, який має чотири грані, тобто будь-яку трикутну піраміду.

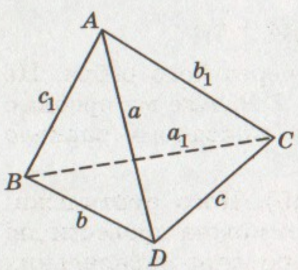
Будемо вживати такі позначення:
A, B, C, D – вершини тетраедра;
a, b, c, a_1, b_1, c_1 – його ребра;
α_B, β_B, γ_B – плоскі кути при вершині B;
$\widehat{AB}$, $\widehat{a}_1$, $\widehat{c}_1$ – двогранні кути;
n_a, n_b, n_c – середні лінії тетраедра;
h_A, h_B, h_C, h_D – висоти тетраедра;
A_h, B_h, C_h, D_h – основи висот тетраедра;
m_A, m_B, m_C, m_D – медіани тетраедра;
G_A, G_B, G_C, G_D – основи медіан (центроїди граней) тетраедра;
G – центроїд тетраедра;
H – ортоцентр (точка перетину висот) тетраедра;
S_A, S_B, S_C, S_D – площі граней;
V – об'єм тетраедра.

2. Тетраедр має чотири вершини і шість ребер (мал. 238). Два ребра тетраедра, які не лежать в одній площині, називають протилежними. У тетраедра три пари протилежних ребер: a і a_1, b і b_1, c і c_1.

Сума будь-яких двох протилежних ребер тетраедра менша від суми всіх інших його ребер.

ДОВЕДЕННЯ. Відомо, що в трикутнику кожна сторона менша від суми двох інших його сторін, тобто

$$a < b + c_1, \quad a_1 < b + c,$$
$$a < b_1 + c, \quad a_1 < b_1 + c_1.$$



Мал. 238

Додавши ці нерівності, дістанемо:

$$2(a + a_1) < 2(b + b_1 + c + c_1),$$

або

$$a + a_1 < b + b_1 + c + c_1.$$

Сума трьох ребер тетраедра, що виходять з однієї вершини, більша від півсуми трьох інших його ребер.

Для доведення розглянемо трикутники ABD, BCD, ACD й запишемо нерівності між їх сторонами:

$$a + b > c_1, \; b + c > a_1, \; a + c > b_1.$$

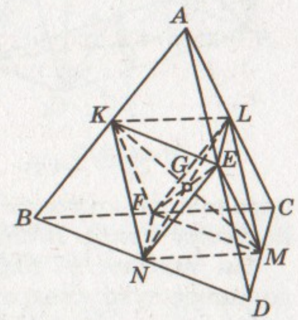
Додамо ці нерівності:

$$2(a + b + c) > a_1 + b_1 + c_1.$$

Звідси $\quad a + b + c > \frac{1}{2}(a_1 + b_1 + c_1).$

3. Відрізок, який сполучає середини двох протилежних ребер тетраедра, називається його *середньою лінією*.

Точками K, L, E, F, M, N позначимо середини ребер AB, AC, AD, BC, CD, BD тетраедра $ABCD$ (мал. 239). Відрізки KM, LN і EF – його середні лінії. Введемо такі позначення: $EF = n_a$, $LN = n_b$, $KM = n_c$ (індекс a у записі n_a означає, що лінія n_a сполучає середини ребер a і a_1).



Мал. 239

Усі три середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них навпіл.

ДОВЕДЕННЯ. KL і MN – середні лінії трикутників ABC і BCD, отже, вони рівні між собою і паралельні. Тоді чотирикутник $KLMN$ – паралелограм, а його діагоналі KM і LN перетинаються в точці G, що ділить їх навпіл.

Чотирикутник $ELFN$ – теж паралелограм, і його діагоналі EF і LN також діляться точкою перетину навпіл. Як бачимо, через точку G – середину LN – проходять KM і EF, і всі вони точкою G діляться навпіл, що й треба було довести.

Середня лінія тетраедра менша від півсуми двох протилежних ребер, які вона не перетинає.

Справді, з $\triangle ELF$ (мал. 239) маємо:

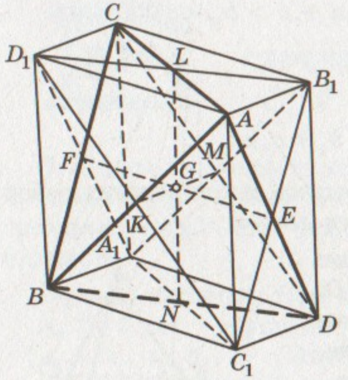
$$EF < EL + LF = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB,$$

звідси $n_a < \frac{1}{2}(c + c_1)$.

Аналогічно можна довести, що $n_a < \frac{1}{2}(b + b_1)$.

4. Виразимо середні лінії тетраедра через його ребра. Це легко зробити, користуючись малюнком 239. Але ми зробимо це інакше. Спочатку введемо поняття описаного навколо тетраедра паралелепіпеда.

Нехай дано тетраедр $ABCD$ (мал. 240). Його протилежні ребра AB і CD мимобіжні, тому через них можна провести дві паралельні площини. Можна провести по парі паралельних площин і через ребра AC і BD, AD і BC. Усі шість площин,



Мал. 240

перетинаючись, утворюють паралелепіпед $AD_1CB_1DC_1BA_1$. Справді, кожна з шести площин перетинає дві паралельні площини по паралельних прямих. Тому $AC_1 \parallel D_1B \parallel CA_1 \parallel B_1D$, $AD_1 \parallel B_1C \parallel DA_1 \parallel C_1B$, $AB_1 \parallel C_1D \parallel BA_1 \parallel D_1C$. Отже, шестигранник – паралелепіпед. Його називають *описаним* паралелепіпедом даного тетраедра.

Як випливає з побудови, вершини тетраедра є ще й вершинами описаного паралелепіпеда. Кожна середня лінія тетраедра сполучає центри протилежних граней описаного паралелепіпеда, тому вона паралельна чотирьом ребрам цього паралелепіпеда і дорівнює кожному з них. Наприклад, $KM = AB_1$, $LN = AC_1$, $EF = AD_1$.

Як відомо, у паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін. Тому

$$AD^2 + BC^2 = AD^2 + B_1C_1^2 =$$
$$= 2AB_1^2 + 2AC_1^2 = 2KM^2 + 2LN^2,$$

звідси випливає:

$$a^2 + a_1^2 = 2n_b^2 + 2n_c^2,$$

або

$$n_b^2 + n_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a_1^2).$$

Аналогічно можна отримати:

$$n_a^2 + n_b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + c_1^2);$$
$$n_a^2 + n_c^2 = \frac{1}{2}(b^2 + b_1^2).$$

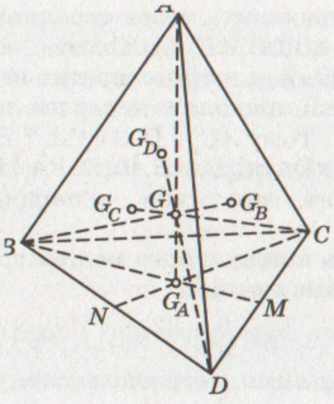
Додавши ці рівності і врахувавши, що $n_b^2 + n_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a_1^2)$,

матимемо: $$2n_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2),$$

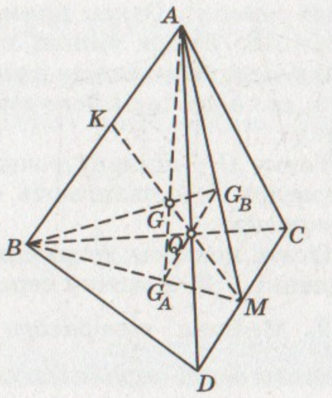
звідси

$$n_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2).$$

5. Відрізок, який сполучає вершину тетраедра з точкою перетину медіан протилежної грані, називається *медіаною тетраедра*. Наприклад, якщо G_A – точка перетину медіан грані BCD, то відрізок AG_A – медіана тетраедра $ABCD$ (мал. 241). У тетраедрі можна провести чотири медіани: AG_A, BG_B, CG_C, DG_D.



Мал. 241



Мал. 242

Теорема. ***Усі чотири медіани тетраедра перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 1 : 3.***

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо спочатку дві медіани – AG_A і BG_B (мал. 242). Сполучимо середину M ребра CD з вершинами A і B. Оскільки AM і BM – медіани трикутників ADC і BCD, то G_A лежить на BM, а G_B – на AM. Таким чином, медіани тетраедра AG_A і BG_B лежать у площині трикутника ABM. Вони не паралельні, а перетинаються в деякій точці G. Відомо, що медіани трикутника точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1 у напрямі від вершини. Тому $MG_A : MB = MG_B : MA$. Однак тоді відрізок G_AG_B паралельний AB і дорівнює $\frac{1}{3}AB$. Отже, трикутники GG_AG_B і GAB подібні (коефіцієнт подібності їх $\frac{1}{3}$). Тому

$$G_AG : GA = 1 : 3,\ G_BG : GB = 1 : 3,$$

і медіана BG_B тетраедра проходить через точку G, яка ділить AG_A у відношенні 1 : 3. Так само можна довести, що кожна з медіан CG_C і DG_D тетраедра проходить через точку G і ділиться нею у відношенні 1 : 3.

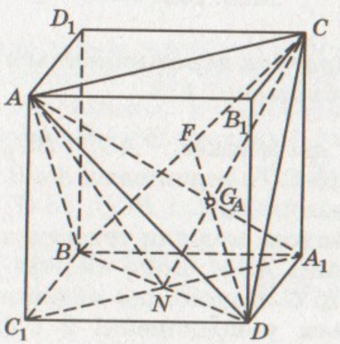
6. ***Точка перетину медіан тетраедра збігається з точкою перетину його середніх ліній.***

Для доведення проведемо пряму MG (мал. 242). Вона обов'язково перетне ребро AB, оскільки точки M і G лежать у площині трикутника ABM. Як видно з доведення попередньої теореми, чотирикутник ABG_AG_B – трапеція. Відомо, що пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей трапеції і точку перетину продовжень її бічних сторін, ділить кожну з її основ навпіл[1]. Отже, пряма MG проходить через середину K ребра AB. Таким чином, середня лінія MK проходить через точку перетину медіан тетраедра G. Аналогічно можна показати, що й дві інші його середні лінії проходять через цю саму точку.

Точку G – спільну точку перетину середніх ліній і медіан тетраедра – називають центром мас, або *центроїдом тетраедра*.

Отже, центроїд тетраедра ділить кожну з його медіан у відношенні $1:3$, а кожну середню лінію навпіл.

7. *Медіана тетраедра лежить на діагоналі описаного навколо нього паралелепіпеда і дорівнює $\frac{2}{3}$ цієї діагоналі.*



Мал. 243

Опишемо навколо тетраедра $ABCD$ паралелепіпед; проведемо його діагональ AA_1 і відрізок CN, де N – центр паралелограма A_1BC_1D (мал. 243). Оскільки $AC \parallel A_1C_1$, то AA_1 і CN перетинаються. Позначимо точку їх перетину літерою G_A. Трикутники ACG_A і A_1NG_A подібні і $AC = 2A_1N$, отже, $CG_A = 2G_AN$. Відрізок CN – медіана трикутника BCD, оскільки $BN = ND$. Таким чином, G_A – центр мас трикутника BCD, а AG_A – медіана тетраедра $ABCD$.

З подібності трикутників ACG_A і A_1NG_A випливає, що

$$AG_A : G_AA_1 = AC : NA_1 = 2 : 1,$$

звідси $AG_A = \frac{2}{3}AA_1$.

Отже, медіана AG_A тетраедра $ABCD$ лежить на діагоналі AA_1 паралелепіпеда, описаного навколо даного тетраедра, і дорівнює $\frac{2}{3}$ цієї діагоналі. Аналогічно можна довести, що медіана BG_B лежить на діагоналі BB_1 і дорівнює $\frac{2}{3}$ її.

8. *Медіана тетраедра менша від середнього арифметичного трьох ребер, які виходять з тієї самої вершини.*

Як доведено вище (мал. 243), $AG_A = \frac{2}{3}AA_1$, де AG_A – медіана тетраедра $ABCD$, а AA_1 – діагональ описаного навколо нього

[1] Див. с. 29, мал. 32.

паралелепіпеда. Однак $AA_1 < AN + A_1N$, причому $A_1N = \frac{1}{2}AC$ і $AN < \frac{1}{2}(AB + AD)$, оскільки медіана трикутника менша від півсуми його сторін, що виходять з тієї самої вершини. Тоді

$$AA_1 < \frac{1}{2}(AC + AB + AD)$$

і, отже,

$$AG_A < \frac{1}{3}(AB + AC + AD), \text{ або } m_A < \frac{1}{3}(a + b_1 + c_1).$$

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Доведіть твердження 793–807.

793. У кожного тетраедра з ребрами a, a_1, b, b_1, c, c_1

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 < 2(ab + ac + bc).$$

794. Сума всіх середніх ліній тетраедра більша від $\frac{s}{4}$, але менша від s, де s – сума всіх його ребер.

795. Сума всіх середніх ліній тетраедра більша від півпериметра будь-якої його грані.

796. Сума відстаней від довільної точки простору до: а) вершин тетраедра більша від $\frac{1}{3}$ суми всіх його ребер; б) середин ребер тетраедра більша від $\frac{1}{4}$ суми всіх його ребер.

797. Сума квадратів середніх ліній тетраедра дорівнює $\frac{1}{4}$ суми квадратів усіх його ребер.

798. Сума всіх медіан тетраедра менша від $\frac{2}{3}$, але більша від $\frac{4}{9}$ суми всіх його ребер.

799. Кожна медіана тетраедра менша від $\frac{2}{3}$ суми всіх його середніх ліній.

800. Сума всіх медіан тетраедра більша від $\frac{8}{9}$, але менша від $\frac{8}{3}$ суми всіх його середніх ліній.

801. Сума квадратів усіх медіан тетраедра дорівнює $\frac{4}{9}$ суми квадратів усіх його ребер.

802. У кожному тетраедрі

$$4(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2) =$$
$$= 9(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2) = 16(n_a^2 + n_b^2 + n_c^2).$$

803. Сума квадратів відстаней від центроїда тетраедра до його вершин дорівнює сумі квадратів його середніх ліній.

804. Сума квадратів ребер тетраедра дорівнює сумі квадратів ребер описаного навколо нього паралелепіпеда.

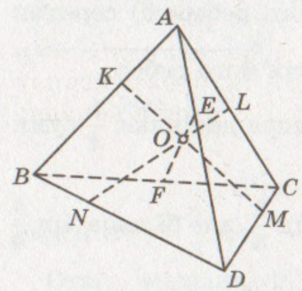
805. Сума квадратів відстаней від центроїда тетраедра до серединих його ребер дорівнює $\frac{1}{8}$ суми квадратів усіх його ребер.

806. Квадрат медіани тетраедра дорівнює $\frac{4}{9}$ різниці суми квадратів трьох його ребер, що виходять з однієї й тієї самої вершини, і суми квадратів усіх його середніх ліній.

807. Сума квадратів трьох ребер тетраедра, які належать одній грані, менша від потроєної суми квадратів трьох інших його ребер.

§20 ПРЯМІ ЧЕВИ В ТЕТРАЕДРІ

9. У попередньому параграфі було доведено, що всі середні лінії тетраедра і всі його медіани проходять через одну точку. Ця властивість є лише окремим випадком більш загальної теореми Чеви.



Мал. 244

Якщо на кожному ребрі тетраедра задати по одній точці, то може трапитися, що в деяких гранях цього тетраедра виконуватиметься умова Чеви (див. с. 14). Особливо цікавий випадок, коли в усіх чотирьох гранях цього тетраедра виконується умова Чеви. Щоправда, досить, щоб ця умова виконувалася в яких-небудь трьох гранях тетраедра.

Нехай K, L, M, N, E, F – точки, які лежать відповідно на ребрах AB, AC, CD, DB, AD і BC тетраедра $ABCD$ так, що в яких-небудь трьох його гранях виконується умова Чеви. Тоді умова Чеви виконуватиметься і в четвертій грані.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай, наприклад, умова Чеви виконується в гранях ABC, ACD і ABD тетраедра $ABCD$ (мал. 244), тобто

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CL}{LA}=1,\quad \frac{AL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DE}{AE}=1,\quad \frac{AE}{ED}\cdot\frac{DN}{NB}\cdot\frac{BK}{KA}=1.$$

Перемножимо ці рівності:

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CL}{LA}\cdot\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DE}{AE}\cdot\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DN}{NB}\cdot\frac{BK}{KA}=1.$$

Після скорочення дістанемо:

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NB}=1,$$

тобто умова Чеви виконується і в грані BCD.

10. *Щоб через точки K, N, M, L, які належать відповідно ребрам AB, BD, DC, CA тетраедра або їх продовженням, можна було провести площину, необхідно й досить, щоб виконувалась така умова:*

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CL}{LA}=1.$$

ДОВЕДЕННЯ. Припустимо, що через точки K, N, M, L, задані на ребрах тетраедра $ABCD$, можна провести деяку площину (мал. 245). Опустимо з усіх вершин даного тетраедра на площину ω перпендикуляри AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 і сполучимо їх основи послідовно відрізками. Зрозуміло, що цим відрізкам належатимуть точки K, N, M, L. Унаслідок цього матимемо чотири пари подібних трикутників:

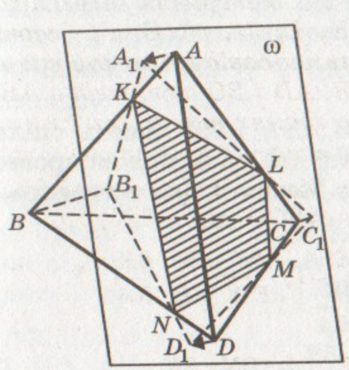
$$\triangle AA_1K \sim \triangle BB_1K,\ \triangle BB_1N \sim \triangle DD_1N,$$
$$\triangle DD_1M \sim \triangle CC_1M,\ \triangle CC_1L \sim \triangle AA_1L.$$

Тому

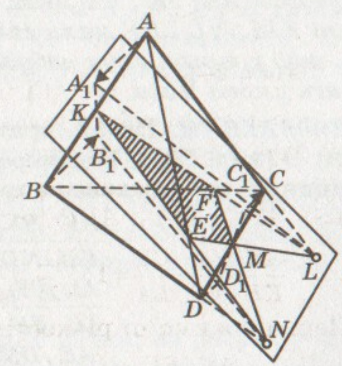
$$\frac{AK}{KB}=\frac{AA_1}{BB_1},\quad \frac{BN}{ND}=\frac{BB_1}{DD_1},\quad \frac{DM}{MC}=\frac{DD_1}{CC_1},\quad \frac{CL}{LA}=\frac{CC_1}{AA_1}.$$

Якщо деякі з точок K, L, M, N, що належать одній площині, задані на ребрах тетраедра, а інші – на продовженнях ребер, як показано на малюнку 246, то і в цьому випадку співвідношення справджуються:

$$\frac{AK}{KB}=\frac{AA_1}{BB_1},\quad \frac{BN}{ND}=\frac{BB_1}{DD_1},\quad \frac{DM}{MC}=\frac{DD_1}{CC_1},\quad \frac{CL}{LA}=\frac{CC_1}{AA_1}.$$



Мал. 245



Мал. 246

Отже,

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CL}{LA}=\frac{AA_1}{BB_1}\cdot\frac{BB_1}{DD_1}\cdot\frac{DD_1}{CC_1}\cdot\frac{CC_1}{AA_1}=1.$$

Цим доведено необхідність сформульованої умови. Тепер доведемо її достатність.

Якщо на ребрах AB, BD, DC, CA тетраедра $ABCD$ або їх продовженнях вибрати точки K, N, M, L так, щоб виконувалась умова

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CL}{LA}=1,$$

то всі чотири точки K, N, M, L належатимуть одній площині.

Доведемо методом від супротивного.

Проведемо площину через точки K, N і M. Нехай вона перетне ребро CA в точці L_1. Тоді, як показано вище,

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CL_1}{L_1A}=1.$$

А за умовою $\dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{BN}{ND}\cdot\dfrac{DM}{MC}\cdot\dfrac{CL}{LA}=1.$

Прирівнявши ліві частини цих рівностей і скоротивши на їх спільні множники, дістанемо:

$$\frac{CL_1}{L_1A}=\frac{CL}{LA},$$

а це можливо тільки в тому випадку, якщо L і L_1 збігаються.

Звідси випливає, що точки K, N, M, L належать одній площині. Доведену теорему називають *теоремою Менелая* для тетраедра (див. с. 13).

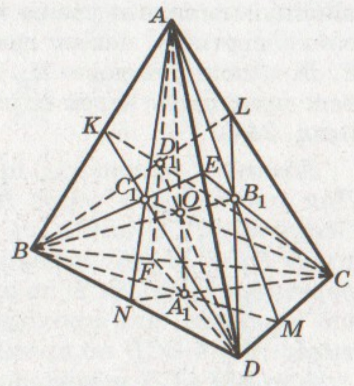
11. *Нехай K, L, M, N, E, F – точки, що лежать відповідно на ребрах AB, AC, CD, DB, AD і BC тетраедра $ABCD$. Щоб прямі KM, NL і EF мали спільну точку, необхідно й достатньо, щоб у трьох яких-небудь гранях цього тетраедра виконувалась умова Чеви.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі KM, NL і EF мають спільну точку O (мал. 247). Тоді через кожні дві з них можна провести площину і, як випливає з теореми Менелая для тетраедра,

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CL}{LA}=1,$$
$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DE}{EA}=1, \qquad (*)$$
$$\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BK}{KA}=1.$$

Перемноживши ці рівності, дістанемо:

$$\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CF}{FB}=1.$$



Мал. 247

Як бачимо, в грані BCD умова Чеви виконується. Якщо поділимо першу з рівностей (*) на добуток двох інших, матимемо

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CL}{LA}=1.$$

Звідси випливає, що умова Чеви виконується і в грані ABC. Поділивши другу з рівностей (*) на добуток двох інших, дістанемо:

$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DE}{EA}=1.$$

А це означає, що умова Чеви виконується в грані ACD.

Як бачимо, умова Чеви виконується в трьох гранях тетраедра, тому (див. с. 194) вона виконується і в четвертій його грані.

Тепер припустимо, що на ребрах тетраедра $ABCD$ дано точки K, L, M, N, E, F так, що в яких-небудь трьох його гранях, наприклад ABC, ACD і ABD, виконується умова Чеви, тобто

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CL}{LA}=1,\quad \frac{AL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DE}{AE}=1,\quad \frac{AE}{ED}\cdot\frac{DN}{NB}\cdot\frac{BK}{KA}=1. \qquad (**)$$

Перемножимо дві перші рівності. Спростивши, дістанемо:

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DE}{AE}=1.$$

Це означає (див. с. 195), що точки K, F, M, E лежать в одній площині і прямі KM і EF перетинаються. Якщо перемножити першу і третю, другу і третю рівності (**), відповідно дістанемо:

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CL}{LA}\cdot\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DN}{NB}=1 \text{ і } \frac{AL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NB}\cdot\frac{BK}{KA}=1.$$

Звідси випливає, що EF і NL, MK і NL теж перетинаються. Але прямі KM, NL і EF не лежать в одній площині. Проте вони попарно перетинаються, а це означає, що всі вони проходять через одну й ту саму точку O.

12. Нехай точки K, L, M, N, E, F задані на ребрах AB, AC, CD, BD, AD, BC тетраедра так, що в яких-небудь трьох його гранях виконується умова Чеви. Тоді, як ми знаємо, виконуватиметься умова Чеви і в четвертій грані. Позначимо точки перетину чевіан граней, протилежних до вершин A, B, C, D, відповідно через A_1, B_1, C_1, D_1. Прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 теж проходять через спільну точку O прямих KM, NL, EF (мал. 247).

Доведемо, наприклад, що пряма AA_1 проходить через точку O. Для цього через ребро AB і точку O проведемо площину. Оскільки K і O належать цій площині і KM проходить через точку O, то M теж належить цій площині. Отже, ця площина перетинає грань BCD по прямій BM. Так само переконуємось, що площина, яка проходить через ребро AC і точку O, перетинає грань BCD по прямій CN.

Але BM і CN перетинаються в точці A_1. Тоді, очевидно, дві січні площини (ABM) і (ACN) перетинаються по прямій AA_1. Кожна з цих площин проходить через точку O. Тому і їх спільна пряма AA_1 проходить через точку O.

Аналогічно можна довести, що кожна з прямих BB_1, CC_1, DD_1 теж проходить через точку O.

Як висновок з цих міркувань, можна сформулювати таку теорему.

Якщо точки K, L, M, N, E, F розташовані на ребрах AB, AC, CD, DB, AD, BC тетраедра $ABCD$ так, що в яких-небудь трьох його гранях виконується умова Чеви, то прямі KM, LN, EF і прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходять через одну точку.

Цю теорему називають *теоремою Чеви* для тетраедра.

Правильні й обернені теореми. Якщо з трьох таких тверджень:

1) точки K, L, M, N, E, F розташовані на ребрах тетраедра так, що в кожній його грані виконується умова Чеви;

2) прямі KM, LN, EF перетинаються в одній точці;

3) прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перетинаються в одній точці – справджується яке-небудь одне, то справджуються й інші.

НАСЛІДОК. Нехай K, L, M, N, E, F – середини ребер тетраедра $ABCD$. Тоді в кожній грані цього тетраедра виконується умова Чеви і тому відрізки KM, LN, EF, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перетинаються в одній точці. Це вже відома нам теорема, оскільки в цьому випадку KM, LN, EF – середні лінії, а AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – медіани тетраедра $ABCD$.

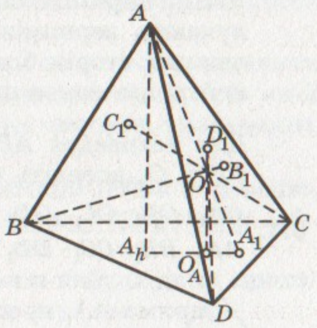
Прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 у тетраедрі, які перетинаються в одній точці, називають прямими Чеви, або *чевіанами*, тетраедра $ABCD$.

13. *Якщо AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – чевіани тетраедра $ABCD$, які перетинаються в точці O, то*

$$\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}+\frac{OD_1}{DD_1}=1,\quad \frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}+\frac{DO}{DD_1}=3.$$

ДОВЕДЕННЯ. Проведемо в тетраедрі $ABCD$ висоту AA_h і паралельний їй відрізок OO_A (мал. 248). Тоді

$\triangle AA_hA_1 \sim \triangle OO_AA_1$, звідси $\frac{OA_1}{AA_1}=\frac{OO_A}{AA_h}$.



Мал. 248

Але відрізки OO_A і AA_h – висоти тетраедрів $OBCD$ і $ABCD$. Основи цих тетраедрів рівні між собою, отже, висоти їх відносяться, як їх об'єми:

$$\frac{OO_A}{AA_h}=\frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}}.$$

Тому і $\frac{OA_1}{AA_1}=\frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}}$.

Так само можна довести, що

$$\frac{OB_1}{BB_1}=\frac{V_{OACD}}{V_{BACD}},\ \frac{OC_1}{CC_1}=\frac{V_{OABD}}{V_{CABD}},\ \frac{OD_1}{DD_1}=\frac{V_{OABC}}{V_{DABC}}.$$

Додамо всі ці рівності:

$$\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}+\frac{OD_1}{DD_1}=\frac{V_{OBCD}+V_{OACD}+V_{OABD}+V_{OABC}}{V_{ABCD}}=1.$$

Зробивши деякі перетворення, можна довести другу частину теореми:

$$\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}+\frac{OD_1}{DD_1}=\frac{AA_1-OA_1}{AA_1}+\frac{BB_1-OB_1}{BB_1}+$$

$$+\frac{CC_1-OC_1}{CC_1}+\frac{DD_1-OD_1}{DD_1}=4-\frac{OA_1}{AA_1}-\frac{OB_1}{BB_1}-\frac{OC_1}{CC_1}-\frac{OD_1}{DD_1}=3.$$

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Доведіть твердження **808–810**.

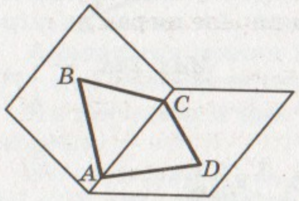
808. Чотири відрізки, що сполучають вершини правильної трикутної піраміди з центрами кіл, вписаних в її протилежні грані, перетинаються в одній точці.

809. Нехай M, N, F – середини ребер CD, DB, BC тетраедра $ABCD$, а K, L, E – точки на ребрах AB, AC, AD, які ділять ці ребра в рівних відношеннях, рахуючи від вершини A. Тоді прямі KM, NL, EF перетинаються в одній точці.

810. У кожній зрізаній трикутній піраміді відрізки, що сполучають вершини більшої основи з точками перетину діагоналей протилежних бічних граней, перетинаються в одній точці. Через цю саму точку проходять і відрізки, які сполучають вершини меншої основи із серединами протилежних сторін більшої основи, і відрізок, який сполучає центроїди основ цієї зрізаної піраміди.

Для тетраедра $ABCD$ з чевіанами, які перетинаються в точці O, доведіть нерівності **811–815**.

811. $\dfrac{OA_1}{AA_1}\cdot\dfrac{OB_1}{BB_1}\cdot\dfrac{OC_1}{CC_1}\cdot\dfrac{OD_1}{DD_1}\le\dfrac{1}{256}$.



Мал. 249

812. $\dfrac{AA_1}{AO}+\dfrac{BB_1}{BO}+\dfrac{CC_1}{CO}+\dfrac{DD_1}{DO}\ge\dfrac{16}{3}$.

813. $\dfrac{AA_1}{A_1O}+\dfrac{BB_1}{B_1O}+\dfrac{CC_1}{C_1O}+\dfrac{DD_1}{D_1O}\ge 16$.

814. $\dfrac{OA_1^2}{AA_1^2}+\dfrac{OB_1^2}{BB_1^2}+\dfrac{OC_1^2}{CC_1^2}+\dfrac{OD_1^2}{DD_1^2}\ge\dfrac{1}{4}$.

815. $\dfrac{AO}{OA_1}+\dfrac{BO}{OB_1}+\dfrac{CO}{OC_1}+\dfrac{DO}{OD_1}\ge 12$.

816. Використовуючи властивості тетраедра, сформулюйте і доведіть найважливіші властивості неплоского чотирикутника $ABCD$ (мал. 249).

817. Довільну внутрішню точку X трикутника ABC сполучено відрізками з його вершинами. Дослідіть властивості такої конфігурації, розглядаючи її як вироджений тетраедр $ABCX$.

§21 ПЕРЕРІЗИ ТЕТРАЕДРА

14. Відомо, що три точки, які не лежать на одній прямій, визначають площину. Тому три точки, задані на ребрах або гранях тетраедра, однозначно визначають переріз його площиною.

Нехай треба побудувати переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через точки K, L і M, що лежать на ребрах AB, AC і CD (мал. 250). Очевидно, для побудови перерізу треба знайти точку N на ребрі BD. Довільно взяти її не можна. Щоб

визначити положення точки N, можна спочатку знайти точку F перетину прямих KL і BC, а потім провести пряму FM до перетину з ребром BD. Нехай FM і BD перетнуться в точці N. Це й буде шукана четверта точка перерізу. Сполучивши послідовно відрізками точки K, L, M, N, дістанемо шуканий переріз. Якщо $KL \parallel BC$, тоді точку F визначити не можна. Треба провести $MN \parallel BC$.

Можна побудувати переріз інакше: спочатку визначити точку E перетину прямих LM і AD, а потім точку N, в якій пряма KE перетинає ребро BD. Обидва способи визначають одну й ту саму точку.

Площина може перетнути три або чотири ребра тетраедра. Залежно від цього в перерізі дістанемо трикутник або чотирикутник.

Якщо січна площина паралельна яким-небудь двом протилежним ребрам, то в перерізі дістанемо паралелограм.

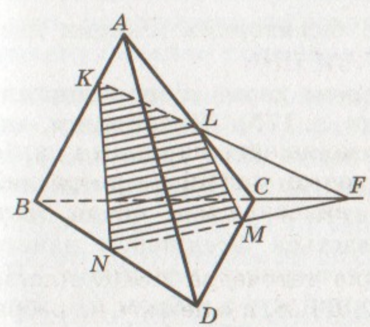
15. Якщо січну площину провести через середини K і M ребер AB і CD тетраедра так, щоб вона перетнула ребра AC і BD відповідно в точках L і N, а продовження ребер AD і BC – у точках E і F, то $AL : LC = BN : ND = BF : FC = AE : ED$ і $KE : KN = KF : KL = EF : LN$.

ДОВЕДЕННЯ (мал. 251). Оскільки точки K, L, M, N лежать в одній площині, то за теоремою Менелая для тетраедра (див. с. 196) маємо:

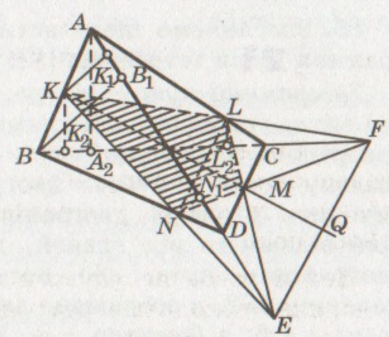
$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CL}{LA}=1.$$

Точки K, M, F, E теж лежать в одній площині, отже,

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DE}{EA}=1.$$



Мал. 250



Мал. 251

За умовою K і M – середини ребер AB і CD, тобто $AK = KB$ і $DM = MC$. Тому утворені співвідношення можна записати так:

$$\frac{BN}{DN}\cdot\frac{LC}{LA}=1 \text{ і } \frac{BF}{FC}\cdot\frac{DE}{EA}=1,$$

або $BN : ND = AL : LC$, $BF : FC = AE : ED$. (*)

Точки N, L, F, E теж лежать в одній площині, отже,

$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DE}{EA}=1.$$

Якщо врахувати доведені вище пропорції (*), дістанемо:

$$\left(\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CF}{FB}\right)^2=1, \text{ звідси } AL : LC = FB : CF.$$

Отже, $AL : LC = BN : ND = BF : FC = AE : ED$.

Щоб довести другу частину теореми, опустимо перпендикуляри KK_1, BB_1, NN_1 на пряму AD і KK_2, AA_2, LL_2 – на BC.

$$\frac{KE}{EN}=\frac{KK_1}{NN_1}=\frac{BB_1}{2NN_1}=\frac{BD}{2DN}=\frac{BN+ND}{2DN}=\frac{BN}{2DN}+\frac{1}{2}$$

і $$\frac{KF}{FL}=\frac{KK_2}{LL_2}=\frac{AA_2}{2LL_2}=\frac{AC}{2LC}=\frac{AL}{2LC}+\frac{1}{2},$$

але

$$\frac{BN}{DN}=\frac{AL}{LC}, \text{ тоді } \frac{KE}{EN}=\frac{KF}{FL}.$$

Отже,

$$\triangle KLN \sim \triangle KFE \text{ і } KN : KE = KL : KF = NL : EF.$$

НАСЛІДОК. Якщо площина проходить через середню лінію KM тетраедра $ABCD$ і перетинає ребра AC і BD у точках L і N, а продовження AD і BC – у точках E і F, то

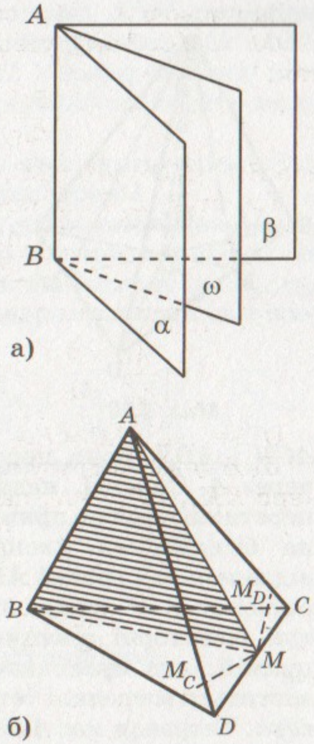
а) пряма KM ділить кожний з відрізків LN і EF навпіл;

б) трикутники KLE і KNF, MNE і MLF рівновеликі.

16. Розглянемо ще властивості бісекторних площин двогранних кутів тетраедра.

Двогранний кут – фігура, утворена двома півплощинами, які виходять зі спільної прямої (див. с. 175). Півплощини, які утворюють двогранний кут, називають його *гранями*, а їх спільну пряму – *ребром* двогранного кута. Півплощина, яка виходить з ребра двогранного кута і кожна точка якої рівновіддалена від граней, називається *бісектором* даного двогранного кута, або його *бісекторною площиною*. На малюнку 252, *а* зображено двогранний кут з ребром AB, його грані α і β, а бісектор – ω. На малюнку 252, *б* півплощина ABM – бісектор двогранного кута AB тетраедра $ABCD$.

Бісектор двогранного кута тетраедра ділить протилежне ребро цього тетраедра на частини, довжини яких відносяться як площі граней, що утворюють цей двогранний кут.



Мал. 252

Нехай, наприклад, ABM – бісектор двогранного кута AB тетраедра $ABCD$ (мал. 252, *б*). Доведемо, що $DM : MC = S_C : S_D$.

Бісекторна площина ділить даний тетраедр на два: $ABMD$ і $ABCM$. Позначимо їх об'єми через V_{ABMD} і V_{ABCM}. Оскільки ці тетраедри мають рівні між собою висоти, то об'єми їх відносяться як площі трикутників BMD і BCM або як основи DM і CM цих трикутників:

$$V_{ABMD} : V_{ABCM} = DM : MC.$$

Якщо за основи тетраедрів $ABMD$ і $ABCM$ взяти грані ABD і ABC, то висоти їх дорівнюватимуть MM_C і MM_D – відстаням від M до цих граней. Але точка M лежить на бісекторній площині двогранного кута AB і, отже, $MM_C = MM_D$. Тоді

$$V_{ABMD} : V_{ABCM} = S_C : S_D.$$

Зіставивши цю пропорцію з попередньою, дістанемо:

$$DM : MC = S_C : S_D,$$

що й треба було довести.

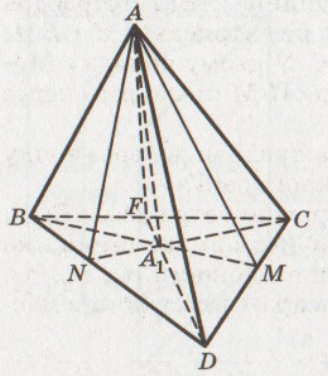
НАСЛІДОК. Якщо дві які-небудь грані тетраедра рівновеликі, то бісектор двогранного кута, утвореного цими гранями, ділить протилежне ребро навпіл. У цьому і тільки в цьому випадку бісектор тетраедра проходить через його центроїд.

17. За якої умови бісекторна площина тетраедра перетинає його грані по їх бісектрисах? За якої умови, наприклад, бісекторна площина ABM (мал. 252, *б*) перетинає грань BCD по BM так, що $\angle DBM = \angle MBC$?

Щоб відповісти на ці запитання, згадаємо властивості бісектриси трикутника: якщо BM – бісектриса ABC, то $DM : MC = DB : BC$.

Якщо ж ABM – бісекторна площина, то

$$DM : MC = S_C : S_D = BD\sin\angle ABD : BC\sin\angle ABC.$$



Мал. 253

Тому

$$DB : BC =$$
$$= BD \sin\angle ABD : BC \sin\angle ABC.$$

Щоб рівність була правильною, досить, щоб міри кутів ABD і ABC були однаковими. Але ця умова не є необхідною. Якщо міри кутів ABD і ABC неоднакові, але їх сума дорівнює 180°, то бісекторна площина ABM перетне грань BCD по бісектрисі BM.

Проведемо в тетраедрі $ABCD$ через вершину A бісекторні площини всіх трьох його двогранних кутів (мал. 253). Позначимо ці площини так: ABM, ACN і ADF. Вони перетинаються по прямій, яка проходить через A. Справді, нехай дві з них, наприклад ABM і ACN, перетинаються по прямій AA_1. Кожна точка цієї прямої лежить на бісекторних площинах ABM і ACN, отже, однаково віддалена від граней ABD і ACD, ABC і ACD. А це означає, що площина ADF також проходить через пряму AA_1. Як бачимо, три бісекторні площини тетраедра перетинаються по одній прямій, яка проходить через його вершину. Її частину, що міститься всередині тетраедра, називають *бісектрисою тетраедра*. Тетраедр має 4 бісектриси.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

818. Тетраедр перетинає площина, паралельна двом його протилежним ребрам. Визначте форму і площу перерізу. За якої умови площа цього перерізу буде найбільшою?

819. Дослідіть, за якої умови перерізом тетраедра площиною є ромб.

820. Доведіть, що центр паралелограма, утвореного внаслідок перерізу тетраедра площиною, паралельною двом його ребрам, лежить на відрізку, що сполучає середини цих ребер.

821. Якщо площина перетинає тетраедр так, що в перерізі утворився трикутник, то площа цього трикутника менша за площу принаймні однієї з граней даного тетраедра. Доведіть це.

822. Якщо в тетраедрі два протилежні двогранні кути прямі, то площі перерізів, які проходять через ребра цих двогранних кутів і центроїд, рівні між собою. Доведіть це.

823. Доведіть, що коли бісекторна площина ABM тетраедра $ABCD$ перетинає дві його грані по бісектрисах AM і BM, то $\angle ABD = \angle ABC$ або $\angle BAD = \angle BAC$. У цьому випадку M – середина CD, а бісекторна площина ABM проходить через центроїд G даного тетраедра.

824. За якої умови бісектриса тетраедра проходить через точку перетину бісектрис його протилежної грані?

825. Якщо через точку, що лежить всередині тетраедра $ABCD$, паралельно його граням провести чотири площини, на яких тетраедр висікає трикутники з площами σ_A, σ_B, σ_C, σ_D і які висікають на гранях тетраедра трикутники з площами δ_A, δ_B, δ_C, δ_D, то:

а) $\sqrt{\dfrac{\sigma_A}{S_A}} + \sqrt{\dfrac{\sigma_B}{S_B}} + \sqrt{\dfrac{\sigma_C}{S_C}} + \sqrt{\dfrac{\sigma_D}{S_D}} = 3$; б) $\sqrt{\dfrac{\delta_A}{S_A}} + \sqrt{\dfrac{\delta_B}{S_B}} + \sqrt{\dfrac{\delta_C}{S_C}} + \sqrt{\dfrac{\delta_D}{S_D}} = 1$.

826. Доведіть, що коли AA_1 – бісектриса тетраедра $ABCD$, то

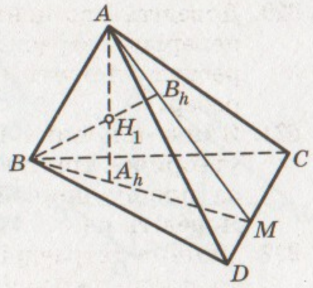
$$S_{A_1BC} = \frac{S_A S_D}{S_B + S_C + S_D},\ S_{A_1CD} = \frac{S_A S_B}{S_B + S_C + S_D},\ S_{A_1BD} = \frac{S_A S_C}{S_B + S_C + S_D}.$$

§22 ОРТОЦЕНТРИЧНІ ТЕТРАЕДРИ

18. Кожний тетраедр має чотири висоти. Іноді, наприклад у правильній трикутній піраміді, усі висоти або їх продовження мають одну спільну точку – *ортоцентр*. Але є й такі тетраедри, які не мають ортоцентра. Наприклад, якщо в тетраедрі $ABCD$ ребра AB і CD дорівнюють a, а всі інші по $2a$, то висоти AA_h і BB_h перетинаються в одній точці H_1, а дві інші висоти через цю точку не проходять (мал. 254). Є й такі тетраедри, в яких жодна пара висот не має спільної точки. Якщо всі чотири висоти або їх продовження мають спільну точку, то такий тетраедр називають *ортоцентричним*.

Перш ніж розглядати властивості ортоцентричних тетраедрів, з'ясуємо, за яких умов дві висоти тетраедра мають спільну точку.

Нехай у тетраедра $ABCD$ висоти AA_h і BB_h перетинаються в точці H_1 (мал. 254). Тоді обидві висоти і ребро AB лежать в одній площині, яка перетинає пряму CD у деякій точці M.



Мал. 254

Оскільки $AA_h \perp (BCD)$ і CD належить площині (BCD), то $AA_h \perp CD$. Так само переконуємося, що $BB_h \perp CD$. Отже, $CD \perp (ABM)$, звідси $CD \perp AB$.

Правильне й обернене твердження. Якщо $AB \perp CD$, то висоти AA_h і BB_h тетраедра $ABCD$ (або їх продовження) перетинаються.

Для доведення через ребро AB і висоту AA_h проведемо площину (ABM). Оскільки $CD \perp AB$ і $CD \perp AA_h$, то $CD \perp (ABM)$, а отже, $(BCD) \perp (ABM)$. Отже, висота BB_h лежить у площині (ABM). У цій площині лежить і висота AA_h. Але висоти AA_h і BB_h не паралельні, тому вони перетинаються в деякій точці H_1.

Отже, *дві висоти тетраедра перетинаються тоді і тільки тоді, коли ребро, з кінців якого опущено ці висоти, перпендикулярне до протилежного ребра тетраедра.*

НАСЛІДОК. Якщо дві висоти тетраедра перетинаються, то перетинаються й дві інші його висоти. Справді, якщо AA_h і BB_h перетинаються, то $AB \perp CD$. Але тоді CC_h і DD_h теж перетинаються.

19. Для подальших досліджень властивостей тетраедра треба знати формулу кута між протилежними ребрами тетраедра. Знайдемо, наприклад, кут між AD і BC. Оскільки $AD = a$, $BC = a_1$, то кут між цими ребрами позначатимемо: $\widehat{aa_1}$.

Нехай K, L, N – середини ребер AB, AC, BD (мал. 255). Тоді $KN \parallel AD$, $KL \parallel BC$ і $\angle NKL = \widehat{aa_1}$.

У трикутнику NKL за теоремою косинусів маємо:

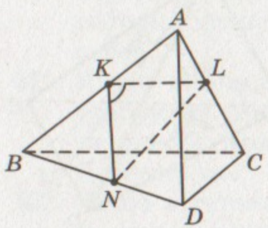
$$NL^2 = KN^2 + KL^2 - 2KN \cdot KL \cos\widehat{aa_1}.$$

Але
$$KN = \frac{a}{2},\ KL = \frac{a_1}{2}$$

і
$$NL^2 = n_b^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2).$$

Отже,
$$\frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2) = \frac{a^2}{4} + \frac{a_1^2}{4} - \frac{aa_1}{2}\cos\widehat{aa_1},$$

звідси
$$\cos\widehat{aa_1} = \frac{b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}{2aa_1}.$$



Мал. 255

Права частина цієї формули може бути й від'ємною. Тому якщо кутом $\widehat{aa_1}$ вважають менший з двох суміжних кутів, утворених прямими AD і BC, то треба писати так:

$$\cos\widehat{aa_1} = \frac{\left|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2\right|}{2aa_1}.$$

Аналогічно можна дістати формули:

$$\cos\widehat{bb_1} = \frac{\left|a^2 + a_1^2 - c^2 - c_1^2\right|}{2bb_1},\quad \cos\widehat{cc_1} = \frac{\left|a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2\right|}{2cc_1}.$$

НАСЛІДКИ. **I.** $a \perp a_1$ тоді і тільки тоді, коли
$$b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2.$$

II. Якщо $a \perp a_1$, то $bb_1 \cos\widehat{bb_1} = cc_1 \cos\widehat{cc_1}$.

III. Якщо $a \perp a_1$ і $b \perp b_1$, то $c \perp c_1$.

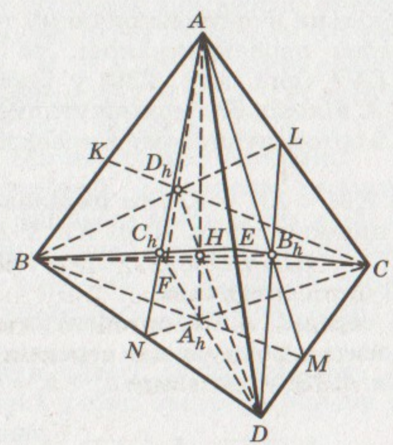
IV. Якщо $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$, то $a \perp a_1$, $b \perp b_1$, $c \perp c_1$.

Якщо тетраедр має дві пари взаємно перпендикулярних протилежних ребер, то, як показано в наслідку III, два інші його ребра теж взаємно перпендикулярні. У такому тетраедрі кожні дві висоти мають спільну точку. Але чотири прямих, які не лежать в одній площині і попарно перетинаються одна з одною, проходять через одну й ту саму спільну точку.

Цим доведено, що *коли тетраедр має дві пари взаємно перпендикулярних протилежних ребер, то він ортоцентричний.* Правильне й обернене твердження: *у кожному ортоцентричному тетраедрі протилежні ребра попарно перпендикулярні.* Адже коли висоти AA_h, BB_h, CC_h, DD_h тетраедра $ABCD$ мають спільну точку, то з наведених вище міркувань випливає, що $AB \perp CD$, $AD \perp BC$, $AC \perp BD$.

20. Кожна висота ортоцентричного тетраедра проходить через ортоцентр протилежної грані.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай тетраедр $ABCD$ ортоцентричний (мал. 256). Тоді $BC \perp AD$. Але A_hD – проекція AD на площину (BCD),



Мал. 256

тому $BC \perp A_hD$. Так само із співвідношень $BD \perp AC$ і $CD \perp AB$ випливає, що $BD \perp A_hC$ і $CD \perp A_hB$. Як бачимо, A_h – спільна точка трьох висот $\triangle BCD$, тобто його ортоцентр.

Аналогічно можна показати, що основа B_h висоти BB_h, є ортоцентром $\triangle ACD$ і т. д.

Правильне й обернене твердження: *якщо одна висота тетраедра проходить через ортоцентр протилежної грані, то такий тетраедр ортоцентричний.*

Справді, нехай $AA_h \perp (BCD)$ і A_h – ортоцентр $\triangle BCD$. Тоді $BC \perp A_hD$, $BD \perp A_hC$, $CD \perp A_hB$, звідси за теоремою про три перпендикуляри маємо: $BC \perp AD$, $BD \perp AC$, $CD \perp AB$. А це означає, що тетраедр $ABCD$ ортоцентричний.

НАСЛІДКИ. I. Якщо одна висота тетраедра проходить через ортоцентр грані, то й інші висоти тетраедра теж проходять через ортоцентри відповідних граней.

II. В ортоцентричному тетраедрі (і лише в такому) основи висот кожних двох граней, опущених на їх спільне ребро, збігаються.

21. *В ортоцентричному (і лише в такому) тетраедрі суми квадратів протилежних ребер рівні між собою:*

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2.$$

Справді, якщо $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$, то $a \perp a_1$, $b \perp b_1$ (див. наслідок IV на с. 207), тому тетраедр ортоцентричний.

НАСЛІДОК. Якщо в ортоцентричному тетраедрі поміняти місцями які-небудь два протилежні ребра, то дістанемо тетраедр (якщо такий існує), який також буде ортоцентричний.

В ортоцентричному (і лише в такому) тетраедрі всі середні лінії рівні між собою.

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки в ортоцентричному тетраедрі протилежні ребра попарно перпендикулярні, то паралелограми $KLMN$, $KEMF$, $LENF$ (див. мал. 239) у такому тетраедрі є прямокутниками. А в кожному прямокутнику діагоналі між собою рівні. Отже, в ортоцентричному тетраедрі $KM = LN = EF$, або $n_a = n_b = n_c$.

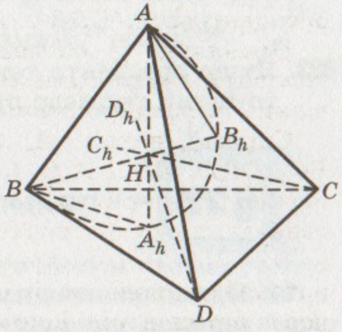
Навпаки, якщо $KM = LN = EF$, то паралелограми $KLMN$, $KEMF$ і $LENF$ – прямокутники. Тоді $KL \perp LM$, $KE \perp EM$, $LE \perp EN$ і, отже, $BC \perp AD$, $BD \perp AC$, $CD \perp AB$. А це означає, що тетраедр $ABCD$ ортоцентричний.

Щоб виразити середні лінії ортоцентричного тетраедра через його ребра, досить у формули для середніх ліній тетраедра загального виду (див. с. 190) підставити $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$, тоді дістанемо:

$$n_a = n_b = n_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+b_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2+c_1^2}.$$

22. *В ортоцентричному тетраедрі (і лише в такому) точка перетину висот H ділить кожну висоту на частини, добутки яких рівні між собою.*

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки висоти AA_h і BB_h ортоцентричного тетраедра перетинаються, то точки A, B, A_h, B_h лежать в одній площині (мал. 257). Крім того, відрізок AB з A_h і B_h видно під прямим кутом. Отже, через ці чотири точки можна провести коло. Висоти AA_h і BB_h – хорди цього кола. Тому, застосовуючи теорему про добуток відрізків хорд, що перетинаються всередині кола, дістанемо:



Мал. 257

$$AH \cdot HA_h = BH \cdot HB_h.$$

Аналогічно можна показати, що

$$BH \cdot HB_h = CH \cdot HC_h = DH \cdot HD_h.$$

Отже, $AH \cdot HA_h = BH \cdot HB_h = CH \cdot HC_h = DH \cdot HD_h$, що й треба було довести.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Доведіть твердження **827–833**.

827. Три відрізки, які сполучають основи висот граней, що лежать на протилежних ребрах ортоцентричного тетраедра, проходять через ортоцентр тетраедра.

828. Якщо K, L, M, N – основи висот граней, розміщені відповідно на ребрах AB, AC, CD, DB ортоцентричного тетраедра $ABCD$, тоді точки K, L, M, N і ортоцентр H даного тетраедра лежать в одній площині.

829. У паралелепіпеді, описаному навколо ортоцентричного тетраедра, усі дванадцять ребер рівні між собою.

830. В ортоцентричному тетраедрі суми квадратів протилежних ребер однакові. Доведіть це твердження, користуючись властивостями паралелепіпеда, описаного навколо тетраедра.

831. В ортоцентричному тетраедрі сума квадратів добутків протилежних ребер вчетверо більша від суми квадратів площ граней:

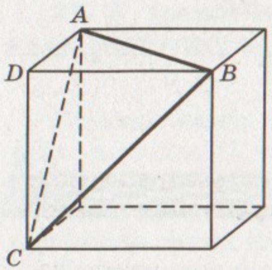
$$a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2 = 4(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2).$$

832. В ортоцентричному тетраедрі сума квадратів середніх перерізів становить $\frac{1}{4}$ частину суми квадратів площ граней, тобто якщо K, L, M, N, E, F – середини ребер, то
$$4(S^2_{KLMN} + S^2_{KEMF} + S^2_{LENF}) = S^2_A + S^2_B + S^2_C + S^2_D.$$

833. Якщо ортоцентр тетраедра збігається з його центроїдом, то такий тетраедр правильний.

§23 ПРЯМОКУТНІ ТЕТРАЕДРИ

23. Прямокутними називаються такі тетраедри, в яких при одній вершині три плоских кути прямі. Таким є, наприклад, тетраедр, утворений внаслідок перерізу прямокутного паралелепіпеда площиною, проведеною через кінці трьох його ребер, що виходять з однієї вершини (мал. 258).



Мал. 258

Вершину з прямими кутами прямокутного тетраедра позначатимемо літерою D, а ребра DA, DB, DC, як і раніше, – літерами a, b, c. Грань, що лежить проти вершини з прямими кутами, називатимемо *гранню-гіпотенузою* прямокутного тетраедра, а інші – *гранями-катетами*.

Кожний прямокутний тетраедр – ортоцентричний, оскільки його ребра, що утворюють прямі кути, перпендикулярні до протилежних граней, а отже, і до протилежних ребер. Ортоцентром прямокутного тетраедра є вершина його прямого тригранного кута.

Отже, прямокутні тетраедри мають усі властивості, характерні для ортоцентричних тетраедрів. Крім того, вони мають ще й інші властивості, характерні тільки для прямокутних тетраедрів.

24. *Грань-гіпотенуза прямокутного тетраедра має найбільшу площу.*

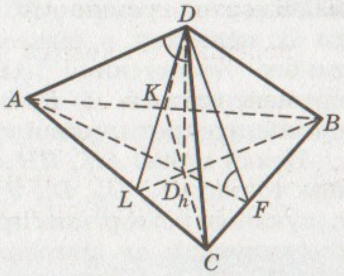
Доведемо, наприклад, що в прямокутному тетраедрі $ABCD$ площа S_D грані-гіпотенузи більша від площі грані-катета S_A, яка лежить напроти вершини A (мал. 259). Для цього опустимо перпендикуляри з A і D на BC. Оскільки тетраедр $ABCD$ ортоцентричний, то ці перпендикуляри перетнуться в одній точці F.

Тоді $S_A = 0{,}5 \cdot BC \cdot DF$, $S_D = 0{,}5 \cdot BC \cdot AF$.

Але $\triangle ADF$ прямокутний, у ньому AF – гіпотенуза, $AF > DF$. Отже, і $S_D > S_A$.

Аналогічно можна довести, що $S_D > S_B$ і $S_D > S_C$.

Очевидно, що й периметр грані S_D найбільший. Тому грань-гіпотенузу ми називатимемо також *найбільшою гранню* прямокутного тетраедра.



Мал. 259

Оскільки в кожному тетраедрі добутки площ граней на відповідні висоти однакові (дорівнюють по $3V$), то висота прямокутного тетраедра, проведена до найбільшої грані, менша від кожної з трьох інших його висот. Називатимемо її *найменшою висотою* прямокутного тетраедра.

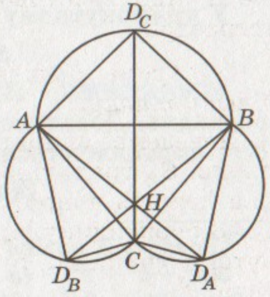
25. *Найбільша грань прямокутного тетраедра – трикутник гострокутний.*

Доведемо це методом від супротивного. Нехай у грані ABC прямокутного тетраедра $ABCD$ який-небудь кут, наприклад ABC, прямий або тупий (мал. 259). Тоді $AC^2 \geq AB^2 + BC^2$ або $AD^2 + DC^2 \geq AB^2 + BC^2$. А цього не може бути, оскільки $AD < AB$ і $DC < BC$.

Отже, у найбільшій грані прямокутного тетраедра не може бути ні прямого кута, ні тупого. Цей трикутник завжди гострокутний.

Оскільки ортоцентр гострокутного трикутника лежить всередині трикутника, а кожна висота прямокутного (ортоцентричного) тетраедра проходить через ортоцентр протилежної грані, то найменша висота прямокутного тетраедра завжди міститься всередині тетраедра. З цього випливає, що три площини, які проходять через найменшу висоту прямокутного тетраедра і його ребра-катети, перетинають протилежні їм ребра (а не їх продовження).

Найбільша грань однозначно визначає прямокутний тетраедр. Іншими словами, існує єдиний прямокутний тетраедр, в якого найбільшою гранню є даний гострокутний трикутник.



Мал. 260

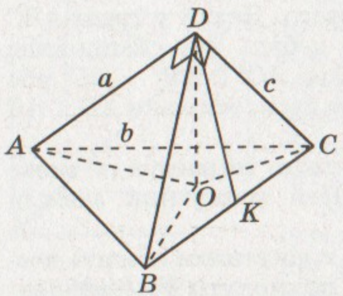
Нехай дано гострокутний трикутник ABC; позначимо його ортоцентр літерою H (мал. 260). Щоб побудувати розгортку прямокутного тетраедра з найбільшою гранню ABC, треба провести прямі AH, BH і CH до їх перетину з півколами, описаними зовні на сторонах даного трикутника ABC. Адже прямокутний тетраедр ортоцентричний, і його висота повинна проходити через ортоцентр протилежної грані.

Нехай прямі AH, BH, CH перетинають півкола у відповідних точках D_A, D_B, D_C. Утворений шестикутник $AD_CBD_ACD_B$ і є шуканою розгорткою прямокутного тетраедра $ABCD$. Зігнемо шестикутник по діагоналях AB, BC і CA так, щоб вершини D_A, D_B, D_C сумістилися в одній точці D. Внаслідок цього дістанемо шуканий прямокутний тетраедр $ABCD$.

Як бачимо, за даною найбільшою гранню можна побудувати єдиний прямокутний тетраедр. А це й означає, що найбільша грань однозначно визначає прямокутний тетраедр.

26. *У прямокутному тетраедрі сума квадратів площ граней-катетів дорівнює квадрату площі грані-гіпотенузи*:

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2.$$



Мал. 261

ДОВЕДЕННЯ. Нехай у прямокутному тетраедрі $DABC$ $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $DK \perp BC$ і $AK \perp BC$ (мал. 261). Позначимо ще площу грані-гіпотенузи літерою S_D, а граней-катетів – S_A, S_B, S_C. Тоді $S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = 0{,}25 \times$ $\times(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$.

Виразивши через a, b, c довжини відрізків DK і AK, неважко показати, що таке саме значення має і S_D^2.

Отже, $S_D^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2$,

що й треба було довести.

Цю теорему називають аналогом теореми Піфагора для прямокутного тетраедра.

У прямокутному тетраедрі

$$S_D < S_A + S_B + S_C \le \sqrt{3}\,S_D.$$

ДОВЕДЕННЯ. Ліва частина цієї подвійної нерівності очевидна. Доведемо праву. Як відомо, для будь-яких чисел a, b і c справджується нерівність[1]:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2.$$

[1]Довести її можна так:
$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab -$ $- 2ac - 2bc = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = (a - b)^2 + (a - c)^2 +$ $+ (b - c)^2 \ge 0$.

Тому $\quad 3(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2) \ge (S_A + S_B + S_C)^2$,

або $\quad 3S_D^2 \ge (S_A + S_B + S_C)^2$,

звідси $\quad S_A + S_B + S_C \le \sqrt{3}\,S_D$.

Рівність тут можлива тільки в тому випадку, якщо $S_A = S_B = S_C$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Доведіть твердження **834–839**.

834. У прямокутному тетраедрі тільки два протилежні ребра можуть бути однакової довжини. Наприклад, якщо $AB = CD$, то $AC \ne BD$ і $AD \ne BC$.

835. У кожному прямокутному тетраедрі:

а) $\frac{1}{h} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{\sqrt{3}}{h}$; б) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$;

в) $abc \ge \sqrt{27h^3}$; г) $V \ge \frac{\sqrt{3}}{h}h^3$;

ґ) $S_D \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}h^2$; д) $\frac{S_A}{a} + \frac{S_B}{b} + \frac{S_C}{c} = \frac{S_D}{h}$.

836. У прямокутному тетраедрі сума квадратів площ перерізів, проведених через ребра-катети і центроїд, вдвічі менша за квадрат площі грані-гіпотенузи.

837. Сума квадратів площ перерізів, проведених через сторони найбільшої грані прямокутного тетраедра і його центроїд, дорівнює квадрату площі найбільшої грані.

838. У прямокутному тетраедрі $ABCD$ з центроїдом G

$$S_{ABG}^2 + S_{CBG}^2 + S_{ACG}^2 = 3(S_{ADG}^2 + S_{BDG}^2 + S_{CDG}^2).$$

839. Якщо $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$ – міри двогранних кутів при ребрах найбільшої грані прямокутного тетраедра, то

а) $\cos^2\hat{a}_1 + \cos^2\hat{b}_1 + \cos^2\hat{c}_1 = 1$;

б) $\cos\hat{a}_1 \cdot \cos\hat{b}_1 \cdot \cos\hat{c}_1 \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$;

в) $\cos\hat{a}_1 \cdot \cos\hat{b}_1 \cdot \cos\hat{c}_1 = \frac{h^3}{abc}$.

ІСТОРИЧНИЙ НАРИС

Геометрія – одна з найдавніших наук. Досліджувати різні просторові форми здавна спонукала людей їхня практична діяльність. Давньогрецький учений Евдем Родоський у IV ст. до н. е. писав: «Геометрія була відкрита єгиптянами і виникла для вимірювання Землі. Ці вимірювання були їм необхідні через розлиття річки Ніл, яка постійно змивала межі. Немає нічого дивного в тому, що ця наука, як і інші, виникла з потреб людини».

Багато початкових геометричних відомостей відкрили також шумеро-вавилонські, китайські та інші вчені давніх часів. Установлювалися вони спочатку тільки дослідним шляхом, без логічних доведень.

Як наука геометрія вперше сформувалась у Стародавній Греції, коли геометричні закономірності і залежності, знайдені спочатку дослідним шляхом, були зведені в систему і доведені як теореми. Одна з математичних праць тих далеких часів дійшла і до нас. Це – «Основи» александрійського математика Евкліда (бл. 365–300 рр. до н. е.).

Про життя Евкліда відомостей мало. Він народився в Афінах і навчався у Платона. На запрошення Птолемея I переїхав працювати до Александрії, яка на той час була центром наукової думки. Папп Александрійський зображає Евкліда як людину лагідну і скромну, винятково чесну і незалежну.

Основну свою працю Евклід грецькою мовою називав «Στοιχεῖα», тобто стихії. Латинською мовою її називали «Elementa» (елементи), російською – «Начала», тобто початки, або основи.

Праця Евкліда складається з 13 книжок. Планіметричний матеріал викладено в п'яти книжках (I–IV, VI). Стереометричний – у книжках XI, XII і XIII. Матеріал, що розглядається зараз у 10-му класі, викладено в книжці XI. Спочатку подається 28 означень, серед яких означення прямої, перпендикулярної до площини, і двох перпендикулярних площин, піраміди, призми, сфери, конуса, циліндра, куба, октаедра, ікосаедра, додекаедра. А потім розглядаються 39 положень. Зокрема, положення про паралельні і перпендикулярні прямі та площини, про кути, утворені прямими і площинами. Тут досліджуються також паралелепіпед і призма.

Не слід думати, що автор «Основ» першим відкрив і довів усі викладені ним теореми. Багато з них були відомі і його попередникам. Але Евклід настільки вдало систематизував математичні відомості, що його «Основи» були головним підручником математики майже для всього світу протягом більш як 2000 років. Книжка Евкліда цікава не тільки своїм багатим змістом, а й формою викладу. У ній спочатку сформульовані означення і аксіоми, а всі наступні твердження доведені як теореми. Це – перша спроба аксіоматичної побудови геометрії.

Аксіоматичний метод побудови геометрії полягає в тому, що:
– вводяться без означень основні геометричні поняття;
– за їх допомогою даються означення всіх інших геометричних понять;
– формулюються аксіоми;
– на основі аксіом і означень доводяться теореми.

У розвитку аксіоматичного методу розрізняють три етапи. Перший етап характеризується змістовим застосуванням аксіоматичного методу. Характерним для нього є використання посилань на геометричну очевидність та інтуїцію, а також відсутність точного опису структури доведень. Як змістову аксіоматичну теорію викладено геометрію в «Основах» Евкліда.

«Основи» Евкліда були зразком логічної строгості до XIX ст., аж поки не виявилися суттєві недоліки в їх побудові. Системі аксіом та постулатів Евкліда бракує повноти та аксіом порядку.

На другому етапі (кінець XIX – початок XX ст.) відбуваються поступове звільнення від спроб змістової аксіоматичної побудови теорій і перехід до формального розуміння аксіоматичного методу. Цей перехід був підготовлений відкриттям у 1826 р. М.І. Лобачевським (1792–1856) неевклідової геометрії. Строге аксіоматичне обґрунтування геометрії Евкліда вперше було здійснено наприкінці XIX ст. у роботах італійського математика Маріо Пієрі (1860–1904), професора Геттінгенського університету Давида Гільберта (1862–1943) і приват-доцента Новоросійського (Одеського) університету Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953). В.Ф. Каган побудував «метричну» систему аксіом евклідової геометрії. Векторну аксіоматику евклідової геометрії створив Герман Вейль (1885–1955).

На третьому, сучасному етапі аксіоматичний метод розуміють як спосіб конструювання формалізованих мовних систем, що веде до чіткого розрізнення штучної формалізованої мови і тієї змістової предметної області, яка в ній відображена.

Аксіоматичний метод широко застосовується в математиці, математичній логіці, у деяких розділах фізики і біології. І все ж за межами логіко-математичних наук сфера його застосування незначна.

Розвивалася геометрія і після Евкліда. Зокрема, Архімед (III ст. до н. е.) дав нові способи обчислення площ і об'ємів геометричних тіл, Аполлоній (III–II ст. до н. е.) дослідив перерізи конуса, Менелай (I–II ст. н. е.) розвинув геометрію і тригонометрію сфери. Але в наступні століття аж до Відродження в Європі геометрія не розвивалася. Тільки в другій половині минулого тисячоліття тут знову почали з'являтися геометричні відкриття. Створювалися нові методи дослідження властивостей геометричних фігур і зароджувалися невідомі раніше галузі стародавньої науки: аналітична, проективна, нарисна, диференціальна геометрії. Особливо вагомим є внесок у їх розробку Р. Декарта, Ж. Дезарга, Л. Ейлера, Г. Монжа.

Рене Декарт (1596–1660) – французький математик, фізик, фізіолог. У книжці «Геометрія» (1637) вперше ввів поняття змінної величини, яка стала поворотним пунктом у математиці. Крім того, він заклав основи аналітичної геометрії. Заслуговують на увагу й філософські праці Р. Декарта: «Правила для керівництва розумом», «Трактат про світло», «Міркування про метод», «Початки філософії». Протягом кількох століть учені всіх континентів зверталися до праць Декарта.

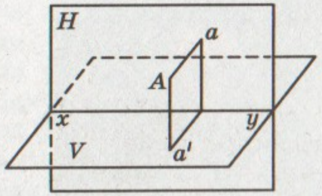
Жирар Дезарг (1591–1661) – французький математик і архітектор. У його книжці, виданій у 1639 р., викладено початки проективної геометрії. Він доповнив евклідів простір невласними (нескінченно віддаленими) точками і невласною площиною, яка складається з усіх невласних точок. У геометрії Дезарга дві прямі однієї площини завжди перетинаються. Маємо ніби новий простір. Геометрію цього простору пізніше назвали *проективною геометрією*, оскільки її ідеї виникли під час вивчення проектування.

Одну з важливих теорем проективної геометрії (точки перетину протилежних сторін шестикутника, вписаного в конічний переріз, лежать на одній прямій) сформулював у 1639 р. Б. Паскаль. На той час йому було 16 років.

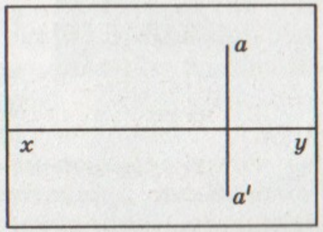
Довгий час ідеї Дезарга більшість математиків не визнавала. Тільки в XIX ст. почалося бурхливе і плідне відродження його геометрії.

Однією зі складових проективної геометрії є *нарисна геометрія*, головний метод якої – метод ортогонального проектування на дві взаємно перпендикулярні площини.

Нехай V і H – горизонтальна і вертикальна площини проекцій, а xy – пряма їх перетину. Площини H і V розбивають увесь простір на 4 квадранти. Якщо точка A розміщена у першому квадранті (мал. 262), то, повернувши площину V навколо прямої xy до суміщення її з площиною H, дістанемо зображення двох проекцій точки A на одній площині (мал. 263). Це комплексний малюнок, або *епюр*. Якщо умовитися проекції точок A, B, C, ... на площину H позначати літерами a, b, c, ..., на площину V – a', b', c', ... і позначати проекції відрізків Aa і Aa', Bb і Bb', ..., то дістанемо спосіб однозначно відображати точки простору на одну площину. Наприклад, на малюнку 264 позначено: точку A, яка міститься у першому квадранті, B – у другому, C – у третьому, D – у четвертому, E – на верхній вертикальній півплощині, F – на нижній вертикальній півплощині.

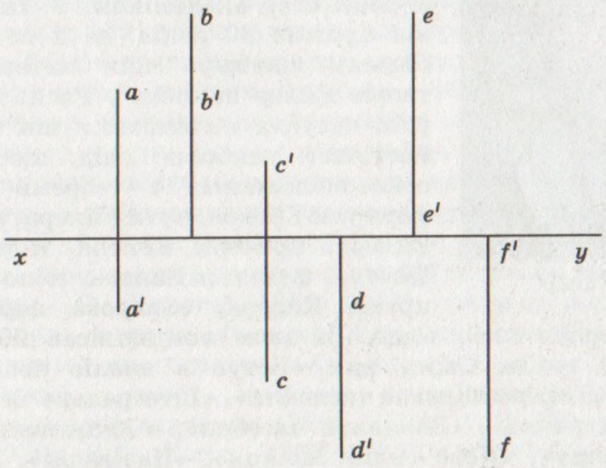


Мал. 262



Мал. 263

Такий метод зображати точки простору на одній площині, доповнений відповідними правилами перетворення епюра, дає змогу порівняно легко розв'язувати багато складних прикладних задач. На честь творця цього методу його називають *методом Монжа*.



Мал. 264

Г. Монж

Гаспар Монж (1746–1818) – французький геометр і суспільний діяч. Свій метод він запропонував, ще будучи слухачем військового училища. Багато років метод Монжа вважався військовою таємницею, настільки він був важливим для військової справи. Тільки в 1794 р. метод було розсекречено. Цей метод став основою нарисної геометрії, яку зараз вивчають в усіх технічних вузах.

Важлива частина сучасної геометрії – *топологія*. Вона вивчає властивості фігур, які не змінюються в результаті топологічних перетворень, тобто в результаті перетворень, які зберігають нескінченну близькість точок. Якщо топологічне перетворення відображає точки A і B, відстань між якими нескінченно мала, на точки A_1 і B_1, то відстань A_1B_1 теж нескінченно мала. Таке перетворення може відобразити, наприклад, куб на піраміду, на кулю, на довільну фігуру у формі картоплини. Для топології всі ці фігури – одного типу. Тор, гиря з однією ручкою, деталь з одним отвором – фігури другого типу.

Особливо значний внесок у розвиток геометрії, як і всієї математики, зробив Л. Ейлер.

Л. Ейлер

Леонард Ейлер (1707–1783) народився у Швейцарії. Двадцятирічним юнаком приїхав у Росію, через 3 роки очолив кафедру фізики, а ще через 3 роки став академіком. У Петербурзі він прожив 30 років, де й похований. Більшу частину своїх математичних творів Ейлер написав у Росії. Майже в усіх галузях математики він залишив настільки глибокий слід, що й зараз основоположними є теореми Ейлера, формули Ейлера, кути Ейлера, рівняння Ейлера, критерії Ейлера, підстановки Ейлера, функція Ейлера, коло Ейлера, пряма Ейлера, ейлерова характеристика, ейлерів клас тощо. Загалом він написав 900 робіт, понад 50 томів. Серед них «Вступ в аналіз нескінченно малих», «Диференціальне числення», «Інтегральне числення», «Морська наука», «Елементи алгебри», «Обчислення затемнення Сонця», «Нова теорія Місяця», «Навігація», 3 томи з питань оптики, 3 томи з артилерії, більше 140 праць з теорії

чисел. Більше половини своїх праць він написав, будучи сліпим.

Вище названо лише найвидатніших учених, які створили великі галузі геометричної науки. У розробці цих та інших галузей багато зробили також Й. Кеплер, К.Ф. Гаусс, Ж. Лагранж, Ж. Понселе, А. Мебіус, Д. Гільберт, Г. Ріман, Г. Мінковський та десятки інших учених.

Особливо вагомий внесок у розвиток геометрії М.І. Лобачевського. Він перший відкрив існування зовсім нової геометрії, пізніше названої на його честь геометрією Лобачевського.

М. Лобачевський

Микола Іванович Лобачевський (1792–1856) народився у Нижньому Новгороді (Росія), навчався у Казанському університеті, пізніше був викладачем, деканом, а з 1827 по 1846 рр. – ректором цього університету. Його рід походив з Волині.

Відкриття М.І. Лобачевського було настільки глибоким і несподіваним, що навіть деякі видатні вчені спочатку визнали його дивацтвом і висміювали автора. Тільки пізніше виявилося, що до подібних висновків незалежно один від одного прийшли також К.Ф. Гаусс і Я. Больяї. Але Больяї опублікував свою працю на кілька років пізніше, ніж Лобачевський, а Гаусс результатів з цієї теми взагалі не публікував, побоюючись, що його ідеї не будуть зрозумілими. Ось чому нову геометрію в усьому світі справедливо називають *геометрією Лобачевського.*

Ця геометрія істотно відрізняється від евклідової. Наприклад, у ній стверджується, що через дану точку можна провести безліч прямих, паралельних даній прямій, що сума кутів будь-якого трикутника менша від 180°. У геометрії Лобачевського не існує прямокутників, подібних трикутників тощо. Багато в чому дивна і незвичайна ця геометрія, хоча в логічному відношенні не поступається евклідовій.

Геометрію Лобачевського вивчають у вищих навчальних закладах. У школі ж розглядають лише евклідову геометрію.

Багато зробив для розвитку геометрії відомий український математик Г.Ф. Вороний (1868–1908) – творець геометричної теорії чисел. Зокрема він досліджував різні заповнення простору рівними многогранниками. Значний внесок у розвиток геометричної науки зробили українські математики М.Є. Ващенко-Захарченко (1825–1912), С.Й. Шатуновський (1859–1929), В.Ф. Каган (1869–1953), О.С. Смогоржевський (1896–1969), М.І. Кованцов (1924–1987) та багато інших.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Д., Вернер А.П., Рыжик В.И. Геометрия для 9–10 классов. – М.: Просвещение, 1984.
2. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К.: Вежа, 2009.
3. Василенко О.О. Серенада математиці. – Харків: Основа, 2003.
4. Гончарова І.В., Скафа О.І. Евристики в геометрії. – Харків: Основа, 2004.
5. Кушнир И.А. Триумф школьной геометрии. – К.: Наш час, 2005.
6. Математика після уроків / Упоряд. І.С. Маркова. – Харків: Основа, 2004.
7. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. – М.: МЦНМО, 2006. – Т. 2.
8. Тадеєв В.О. Геометрія: 10 клас. – Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2003.
9. Філіповський Г.Б. Авторська шкільна геометрія. – Харків: Основа, 2009.
10. Шмигевський М.В. Видатні математики. – Харків: Основа, 2004.

ВІДПОВІДІ

3. 100°. **4.** 15°. **11.** 50°. **12.** 4 см; $1,6\sqrt{10}$ см; $0,8\sqrt{13}$ см. **13.** 50 см. **15.** $12\sqrt{5}$ см^2. **16.** 5 см і 15 см. **23.** а) 7 см; б) $2\sqrt{10}$ см. **24.** 120°. **25.** $(4\sqrt{97}+28)$ см; 60°. **29.** 6 см. **30.** 294 см^2. **31.** 20 см. **33.** $n = 10$. **35.** $P = 18\sqrt{2}$ см; $S = 27\sqrt{3}$ см^2. **36.** $P = 18\sqrt{3}$ см; $S = 27\sqrt{3}$ см^2. **37.** $(4-2\sqrt{3})$ см; $S = 4\pi$ см^2. **39.** $5\sqrt{2}$; $\frac{5\sqrt{5}}{2}$; $\frac{5\sqrt{17}}{2}$. **40.** $N(-10; 5)$. **41.** $M(3,25; 0)$. **42.** $y = x + 3$; $S = 4,5$. **44.** Ромб; $P = 4\sqrt{26}$; $S = 24$. **48.** 10. **49.** $x = \pm 2$. **50.** $x = 0$; $x = -5$. **52.** 84 см^2 і 216 см^2. **53.** $(60+24\sqrt{2})$ см. **54.** 1 : 3. **55.** На 44 %. **56.** $6\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$. **57.** 152,5 см. **59.** б) $BC = 3\frac{1}{3}$ см або 6 см; в) $AB = 7$ см; $AC = 13$ см; г) $AB = 16$ см. **60.** $m = 10$ см; $h = 1,6\sqrt{21}$; $l = \frac{8}{17}\sqrt{253}$ см. **61.** 5,9 см. **63.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **64.** $r = 6$ см; $R = \frac{15}{8}\sqrt{41}$ см. **65.** 20 см^2. **66.** а) $10\frac{5}{6}$ см; б) 3 см; в) $4\frac{2}{3}$ см. **67.** $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ дм^2. **68.** $\sqrt{3} : 1$. **70.** $2a^2$. **71.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **72.** 3 : 2. **73.** $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$. **74.** $-2a$; $-2b$; $2\sqrt{a^2+b^2}$; $S = 2ab$. **75.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}$; $2\sqrt{5}$; $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. **77.** $B(0; -3)$; $C(4; -3)$; $(x-2)^2+(y+3)^2 = 2$; $(x-2)^2+(y+3)^2 = 4$. **78.** $y = 1 - x$. **79.** $y = -3x - 4$. **82.** $6\sqrt{3S}$. **83.** $k = 3$; $B_1(9; -6)$. **84.** 8 см і 10 см. **85.** 14 см. **87.** $2\sqrt{3}$. **88.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **89.** $a \in (-5; 6)$. **91.** $2x + 3y - 2 = 0$. **92.** $3x - 4y - 15 = 0$; $3x + 4y - 15 = 0$. **93.** $3x + y - 10 = 0$; $x + 2y - 5 = 0$; $x - 3y = 0$; $O(3; 1)$. **94.** 7 : 1. **96.** 10. **111.** Ні. **120.** На 3 або 4 частини. **138.** Безліч. **141.** Ні. **142.** Безліч. **143.** Чотири. **144.** Ні. **180.** $\frac{3a}{2}$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **181.** $\frac{3\sqrt{41}}{2}$. **182.** $3\sqrt{2}a$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **183.** $\frac{3a^2}{8}$. **184.** $S = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **186.** Шестикутник. **187.** Ні. **194.** $S = \frac{3\sqrt{39}}{2}$ см^2. **197.** $2a\sqrt{5}$; $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **198.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; $3a\sqrt{2}$. **200.** $2a\sqrt{5}$. **201.** 2 : 3. **223.** 7,5 см або 1 см. **224.** 36 см або $5\frac{1}{7}$ см. **225.** 5 : 2. **226.** а) 9,6 дм; б) 8 дм; в) $\frac{3m}{4}$. **227.** 6 см і

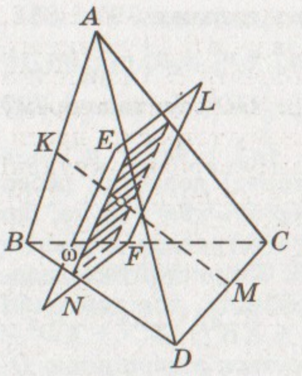
4 см. **228.** 34 см; 36 см. **235.** 32 см. **237.** Тетраедр. **238.** Чотирикутник. **256.** а) $2a$; б) 3 : 1. **257.** $(2\sqrt{2}-1) : 1$. **258.** 10 см. **260.** 9 см. **261.** $\frac{a\sqrt{16b^2-5a^2}}{16}$. **262.** $\sqrt{2}(1+\sqrt{2})l$; $\frac{\sqrt{2}}{2}l^2$. **263.** Паралелограм. **264.** $\frac{2}{3}(a+2b)$. **269.** $0,75a^2$. **270.** а) 1 : 2; б) $\frac{7a+b}{a+7b}$. **272.** $p = \frac{a}{4}(1+2\sqrt{3})$; $S = \frac{a^2\sqrt{11}}{64}$. **273.** $\frac{b^2\sqrt{19}}{32}$. **275.** $\frac{b\sqrt{4b^2+2a^2}}{4}$. **276.** $\frac{a}{2}\left(4+\sqrt{7}\right)$. **277.** $\frac{d^2\sqrt{6}}{12}$. **278.** 1 : 5. **297.** а) 2,5 см; б) 4 см; в) 4 см; г) 6 см. **298.** а) 6 см; б) 6 см; в) 3 см; г) 6 см. **299.** а) 24 см; $2\sqrt{193}$ см; б) $\sqrt{129}$ см; 7 см. **300.** 32 см; 42 см^2. **301.** 24 см; $16\sqrt{3}$ см^2. **302.** $\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}+2\right)a$. **309.** 8 см і 5 см. **310.** $4\sqrt[4]{27}$ см; 4 см^2. **311.** 5 см; $\frac{17}{3}$ см; $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ см. **312.** $\frac{2a(\sqrt{10}+3)}{3}$. **313.** $2c+\sqrt{a^2+b^2}$; $\frac{1}{2}c\sqrt{a^2+b^2}$. **314.** $\frac{3}{8}a^2\operatorname{tg}\alpha \approx 19,99$. **315.** $2a\sqrt{5}$; $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **316.** $3a\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. **320.** Вказівка: через довільну точку однієї з прямих проведіть прямі, паралельні двом іншим прямим. **349.** 15 см і 10 см або 3 см і 2 см. **350.** Ні. **351.** а) 18 см^2; б) 0; в) 18 см^2. **352.** а) Q; б) $0,5Q$. **353.** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{2}$. **424.** 60°. **425.** а) 80°; б) 60°. **426.** б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 90°. **427.** б) arccos 0,6; в) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. **429.** Так. **430.** Ні. **431.** Так. **434.** б) $3a\sqrt{2}$; в) $(10+3\sqrt{2})$ дм. **435.** 90°. **437.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a}{4}$. **438.** а) 60°; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; в)–г) 90°. **439.** а) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) – в) 90°; г) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **440.** 60°. **441.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **442.** 60°. **443.** б) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; в) 30°. **444.** α. **445.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{2}a}{4}$; $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **446.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **447.** Так. **448.** 60°. **449.** $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$. **461.** $a\operatorname{ctg}\alpha$; $\frac{a}{\sin\alpha}$. **462.** $a\sqrt{3}$. **463.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **464.** 13 см. **468.** $3a$. **469.** 12 см. **472.** $\frac{3\sqrt{231}}{4}$ см. **474.** $m : n$. **475.** 1 см. **476.** б) 7 см. **477.** а) 2 см; б) 3 см. **480.** 20 см. **482.** 8 см. **484.** $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ см^2. **485.** 10 см. **486.** 12,5 см. **488.** 24 см. **489.** 33,6 см.

490. 20 см. **491.** а) 3 см; б) 7 см. **492.** $12\sqrt{2}$ см; 20 см; $4\sqrt{43}$ см. **504.** $\frac{2}{3}p(2\sqrt{2}+1)$; $\frac{p^2\sqrt{7}}{9}$; $\cos A_1=\cos B_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos C=\frac{3}{4}$. **513.** 3 см. **514.** $2a$; $a\sqrt{2}$. **515.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **516.** 120°. **517.** $a\sqrt{2}$; $2a$. **518.** $\frac{a\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **520.** $6\sqrt{15}$ см; 26 см. **536.** 13 см; $\sqrt{219}$ см. **537.** 13 см; 15 см. **538.** 5 см. **539.** $5\sqrt{6}$ см. **540.** 2,8 см. **541.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **542.** 12 см. **543.** $\sqrt{281}$ см; $5\sqrt{5}$ см. **544.** 5 см. **545.** 7 см. **546.** $5\sqrt{5}$ см; 20 см; 10 см. **547.** $\frac{p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$. **548.** $2\sqrt{3}$ см; $\sqrt{39}$ см; $\sqrt{39}$ см. **549.** 6 см; 6 см; 5 см; 15 см. **551.** 2 см. **557.** 5,2 см. **558.** 91 $см^2$. **559.** $\frac{h^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\sin\alpha}$. **560.** $\frac{2a^2}{9}$. **561.** $a^2\sqrt{2}$. **562.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **576.** $\arccos\frac{1}{4}$. **579.** а) $2\sqrt{11}$ см; б) 1 см; в) $a\sqrt{2}$. **580.** $6\sqrt{2}$ см. **581.** $4\sqrt{6}$ см. **582.** a. **583.** m. **584.** а) $a\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{3}$; в) 60°. **586.** $\cos\varphi=\frac{1}{4}$. **587.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **588.** 44 см; 96 $см^2$. **589.** $m:n$. **590.** $\frac{4}{9}S$. **596.** arctg2. **597.** в) $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; ґ) $\arccos\frac{1}{7}$. **598.** $\pi-\arccos\frac{25\sqrt{154}}{1001}$. **599.** 200 $см^2$. **600.** $\sqrt{337}$ см. **601.** $0,8\sqrt{337}$ м. **602.** 13 см. **603.** 60° або $\pi-\arccos\frac{103}{2160}$. **604.** $\frac{\sqrt{2(a+c+b)(a+c-b)(a-c+b)(b-a+c)}}{2c}$. **605.** 90°; $\arccos\frac{1}{4}$; $\arccos\frac{3}{4}$. **606.** $\arccos\frac{3}{4}$. **613.** 90°. **615.** $\cos B=\cos\alpha\cos\beta$; $\cos C=\frac{\sin\beta}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\beta\,\mathrm{tg}^2\alpha}}$ і $\cos M=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}}$. **616.** $2\arcsin\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha}$. **632.** 2 см. **633.** 3,6 см і 6,4 см. **635.** 24 см і $2\sqrt{69}$ см. **636.** 12,8 см. **637.** 6,4 см. **638.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **639.** $\frac{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}{2}$. **640.** Так. **643.** 48 см. **644.** 30°. **645.** $12\sqrt{14}$ см. **646.** 45°. **647.** 20 см; $20\sqrt{2}$ см. **648.** 19 см. **649.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$; $\arccos\frac{1}{3}$. **650.** а) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) $\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$. **651.** d і $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **653.** $\frac{l^2\sqrt{3}}{6\cos\beta}$. **654.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **655.** 1 : 3. **656.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **658.** 72 см або 90 см. **659.** $3\frac{17}{21}$ см.

660. 2 arcctg2. **661.** $192\sqrt{2}$ $см^2$. **662.** $\frac{a+b}{2\cos\varphi}$. **663.** 840 $см^2$; $140\sqrt{11}$ $см^2$; $\arccos\frac{\sqrt{11}}{6}$. **664.** $4\frac{2}{7}$ $м^2$. **665.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{4l^2-b^2}}$. **666.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **667.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **668.** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$; $\frac{3a^2}{4}$; $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **671.** 24 см; $4\sqrt{21}$ см. **672.** $12\sqrt{2}$. **675.** $0,5a^2$. **677.** $a^2\sqrt{3}$. **688.** $\sqrt{a^2-(b+c)^2}$. **689.** 4 дм і 5 дм; $\sqrt{20,5}$ дм. **690.** $\sqrt{h^2+r^2}$. **691.** 20 см. **692.** 12 см. **693.** $2\sqrt{43}$ см. **694.** 20 см. **695.** a. **696.** а) 40 см; б) $\frac{60\sqrt{34}}{17}$ см. **697.** 24 см. **698.** $\frac{a\sqrt{141}}{6}$. **699.** 12 см. **700.** $\frac{d}{2}\sqrt{16+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **701.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **704.** $2d$. **705.** 15 см; 16 см. **706.** 8 м. **707.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **708.** 50 см. **710.** 45 мм. **711.** 8 м. **712.** 28 м. **713.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **714.** a; $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **715.** $\sqrt{6}$ см. **716.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **717.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **719.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **721.** 20 см. **722.** 8 см. **723.** 10 см. **725.** $\frac{2\sqrt{193}}{7}$ см. **726.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **727.** 5 см. **728.** $\frac{c\sqrt{6}}{8}$. **729.** 26 см. **730.** 8 см і 16 см. **731.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **732.** а) $a\sin\alpha$; б) $2a\sin\frac{\alpha}{2}$. **733.** 24 см. **734.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; б)–в) $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **735.** 11,2 см. **736.** $\sqrt{n^2-m^2}$. **737.** $\frac{24\sqrt{19}}{19}$ см. **738.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{12}$; г) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **739.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **740.** Пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр вписаного кола. **741.** 4 прямі. **742.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (див. задачу 739). **764.** 45°. **765.** $8\sqrt{3}$ дм. **766.** 45°. **767.** 30°. **768.** 45°. **769.** $\frac{a}{2}\sqrt{4+\mathrm{ctg}^2\alpha}$. **770.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **771.** 45°. **772.** $c\sin\alpha$. **773.** $a\sin\alpha$; $a\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha}{2}}$. **774.** $\frac{1}{2}h\sqrt{4+\mathrm{ctg}^2\alpha}$. **775.** 48 см. **776.** $\frac{1}{2}d^3\sin\beta\cos^2\beta$. **777.** $l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$. **778.** $5\sqrt{13}\,\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$; $\mathrm{arctg}\frac{6}{17}$. **779.** $\frac{a}{2}$. **780.** 12,5 см. **781.** 60°. **782.** 30°. **783.** 30°. **784.** 3 м; $3\sqrt{3}$ м. **785.** $\frac{3}{7}$ см; $\frac{52}{7}$ см. **786.** $a(\sqrt{3}\pm1)$. **787.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **793.** Помножте нерівності $a_1<b+c$, $b_1<a+c$,

$c_1 < a + b$ відповідно на a, b, c і утворені нерівності додайте. **794.** Як випливає з п. 3, $n_a < \frac{1}{2}(b + b_1)$, $n_b < \frac{1}{2}(c + c_1)$, $n_c < \frac{1}{2}(a + a_1)$. Тому $n_a + n_b + n_c < \frac{1}{2}(a + a_1 + b + b_1 + c + c_1)$. Крім того, $n_a + n_b > c$, $n_a + n_b > c_1$. Отже, $n_a + n_b > \frac{1}{2}(c + c_1)$. Аналогічно $n_a + n_c > \frac{1}{2}(b + b_1)$, $n_b + n_c > \frac{1}{2}(a + a_1)$. Тепер додайте почленно ці три нерівності. **795.** Скористайтесь такими нерівностями (мал. 239): $GF + GM > FM$, $GM + GN > MN$, $GN + GF > NF$. **796.** а) Якщо x – довільна точка, то $XA + XB > AB$, $XA + XD > AD$, $XA + XC > AC$, $XB + XD > BD$, $XB + XC > BC$, $XC + XD > CD$. Додавши ці нерівності і поділивши обидві частини результату на 3, дістанемо: $XA + XB + XC + XD > \frac{1}{3}(AB + AC + AD + BC + BD + CD)$. Якщо X лежить на якому-небудь ребрі тетраедра або збігається з його вершиною, доведення треба дещо змінити, замість $>$ написати $\geqslant$. Остаточний результат не зміниться. б) Якщо вказана в задачі точка – центроїд тетраедра G, то правильність сформульованого твердження випливає із задачі 794, бо $GK + GM + GL + GN + GE + GF = n_a + n_b + n_c > \frac{1}{4}(a + a_1 + b + b_1 + c + c_1)$. Якщо $X \neq G$, то $XK + XM + XL + XN + XE + XF > n_a + n_b + n_c$. **797.** Виразіть квадрати середніх ліній тетраедра через його ребра (див. п. 4) і додайте почленно три рівності. **798.** Як випливає з п. 8 (с. 192), $m_A < \frac{1}{3}(a + b_1 + c_1)$, $m_B < \frac{1}{3}(b + a_1 + c_1)$, $m_C < \frac{1}{3}(a_1 + b_1 + c)$, $m_D < \frac{1}{3}(a + b + c)$. Додавши почленно ці нерівності, дістанемо: $m_A + m_B + m_C + m_D < \frac{2}{3}(a + a_1 + b + b_1 + c + c_1)$. Щоб довести другу частину твердження, додайте шість нерівностей (мал. 242): $AB < AG + GB$, $AC < AG + GC$, $AD < AG + GD$, $BC < BG + GC$, $BD < BG + GD$, $CD < CG + GD$. **799.** Доведіть, що коли G_A – точка перетину медіан $\triangle FMN$ (мал. 239), то AG_A – медіана тетраедра $ABCD$ і $GG_A < \frac{1}{3}(GF + GM + GN)$. Звідси випливає, що $m_A < \frac{2}{3}(n_a + n_b + n_c)$. **800.** З попередньої задачі випливає: $m_A + m_B + m_C + m_D < \frac{8}{3}(n_a + n_b + n_c)$. Щоб довести, що $m_A + m_B + m_C + m_D > \frac{8}{9}(n_a + n_b + n_c)$, досить використати твердження, сформульовані в задачах 794 і 798. **801.** Виразіть квадрат кожної медіани тетраедра через його ребра і додайте чотири утворені рівності. **802.** Рівність, яку треба довести,

випливає з тверджень, сформульованих у задачах 797 і 801. **803.** З попередньої задачі випливає, що $n_a^2 + n_b^2 + n_c^2 = \frac{9}{16}(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$. Із задачі 797 випливає: $a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4n_a^2 + 4n_b^2 + n_c^2$. А в описаному навколо тетраедра паралелепіпеді довжини ребер дорівнюють n_a, n_b, n_c (див. мал. 240). Зверніть увагу на те, що відстань від центроїда до середини ребра тетраедра дорівнює половині відповідної середньої лінії. **806.** Скористайтесь задачею 797. **807.** Як випливає з теореми Лейбніца, для довільної точки X правильна така нерівність: $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 \geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$. Якщо X збігається з вершиною D, то $DA^2 + DB^2 + DC^2 \geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$. Але $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$; $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2)$, $\frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2)$, отже, $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2)$, звідси $3(a^2 + b^2 + c^2) > a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, що й треба було довести. **808.** Використайте теорему Чеви. **809.** З умови задачі випливають співвідношення (мал. 244): $\frac{AK}{KB} = \frac{AE}{ED} = \frac{AL}{LC}$, $\frac{BN}{ND} = \frac{DM}{MC} = \frac{CF}{FB} = 1$. Тоді $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BN}{ND} \cdot \frac{DE}{EA} = 1$. Отже, в грані ABD умова Чеви виконується. Аналогічно можна показати, що умова Чеви виконується в двох інших гранях. Далі треба використати теорему Чеви. **810.** Продовжте бічні ребра зрізаної піраміди так, щоб утворився тетраедр, і використайте теорему Чеви. **811.** Нерівності 811–815 випливають з рівностей п. 13 і співвідношень $\frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}} \leqslant \sqrt[4]{xyzt} \leqslant \frac{x + y + z + t}{4} \leqslant \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{4}}$. **815.** Скористайтесь малюнком 244. $\frac{AO}{OA_1} = \frac{AK}{KB} + \frac{AL}{LC} + \frac{AE}{ED}$, $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BK}{KA} + \frac{BF}{FC} + \frac{BN}{ND}$, $\frac{CO}{OC_1} = \frac{CL}{LA} + \frac{CF}{FB} + \frac{CM}{MD}$, $\frac{DO}{OD_1} = \frac{DE}{EA} + \frac{DN}{NB} + \frac{DM}{MC}$. Якщо додати ці рівності і згадати, що сума двох взаємно обернених додатних чисел не менша 2, дістанемо: $\frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} + \frac{DO}{OD_1} \geqslant 12$. Рівність тут має місце лише тоді, коли AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – медіани даного тетраедра. **818.** Якщо тетраедр $ABCD$ перетнути площиною, паралельною ребрам AB і CD, то в перерізі утвориться



Мал. 265

паралелограм (мал. 265). Якщо $AE : ED = m : n$, то з подібності двох пар трикутників випливають такі пропорції: $AL : LC = m : n$ і $BN : ND = m : n$. Отже, $EL = \frac{m}{m+n} \cdot CD$, $EN = \frac{m}{m+n} \cdot AB$. Площа цього паралелограма $S_{ELFN} = EL \cdot EN \cdot \sin\widehat{cc_1} = \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot cc_1 \sin\widehat{cc_1}$. Добуток $cc_1 \sin\widehat{cc_1}$ тут сталий, $\frac{mn}{(m+n)^2} = \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{4}$. Таким чином, площа перерізу S_{ELFN} буде найбільшою, якщо E, L, F, N – середини ребер тетраедра. У цьому випадку маємо: $S_{ELFN} = \frac{cc_1}{4} \sin\widehat{cc_1}$ або $S_{ELFN} = \frac{1}{8}\sqrt{4c^2c_1^2 - \left(a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2\right)^2}$. **819.** Щоб паралелограм, про який ішлося в попередній задачі, був ромбом, треба, щоб виконувалася умова: $\frac{m}{m+n} \cdot CD = \frac{m}{m+n} \cdot AB$ або $m : n = AB : CD$. **821.** Розгляньте окремо три випадки: а) переріз проходить через ребро тетраедра; б) переріз проходить через вершину тетраедра; в) січна площина перетинає три ребра тетраедра у їх внутрішніх точках. **822.** Нехай у тетраедрі $ABCD$ двогранні кути при ребрах AB і CD прямі. Доведіть, що $S_{ABG} = 0{,}5\sqrt{S_C^2 + S_D^2}$, $S_{CDG} = 0{,}5\sqrt{S_A^2 + S_B^2}$, $S_C^2 + S_D^2 = S_A^2 + S_B^2$. Тому $S_{ABG} = S_{CDG}$. **825.** Площі паралельних основі перерізів піраміди відносяться, як квадрати їх відстаней від вершини. Тому $\sigma_A : S_A = h_A^2 : H_A^2$, h_A і H_A – відстані площин $B_AC_AD_A$ і BCD від вершини A. Але $h_A : H_A = AO : AA_1$, тому $\frac{\sigma_A}{S_A} = \frac{AO^2}{AA_1^2}$ або $\sqrt{\frac{\sigma_A}{S_A}} = \frac{AO}{AA_1}$. Якщо записати ще три аналогічні співвідношення і додати їх, дістанемо: $\sqrt{\frac{\sigma_A}{S_A}} + \sqrt{\frac{\sigma_B}{S_B}} + \sqrt{\frac{\sigma_C}{S_C}} + \sqrt{\frac{\sigma_D}{S_D}} = \frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} + \frac{DO}{DD_1}$. За теоремою п. 13, права частина цієї рівності дорівнює 3. Доводячи друге співвідношення, покажіть, що $\sqrt{\frac{\delta_A}{S_A}} + \sqrt{\frac{\delta_B}{S_B}} + \sqrt{\frac{\delta_C}{S_C}} + \sqrt{\frac{\delta_D}{S_D}} = \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} + \frac{OD_1}{DD_1}$, і також скористайтесь теоремою Жергона для тетраедра. **826.** Доведіть, що $S_{A_1BC} : S_D = S_{A_1CD} : S_B = S_{A_1BD} : S_C$ і $S_{A_1BC} + S_{A_1CD} + S_{A_1BD} = S_A$. Тепер поділіть S_A на три частини,

пропорційні S_D, S_B і S_C. **827.** Скористайтесь твердженням п. 13, врахувавши, що в ортоцентричному тетраедрі $ABCD$ усі висоти AA_h, BB_h, CC_h, DD_h проходять через ортоцентр H і що точки A_h, B_h, C_h, D_h – ортоцентри граней. **828.** Застосуйте теорему Чеви для тетраедра. **829.** В ортоцентричному тетраедрі протилежні ребра попарно перпендикулярні, тому перпендикулярні й діагоналі кожної грані описаного паралелепіпеда (мал. 240). Отже, усі шість граней такого паралелепіпеда – ромби. **830.** Як показано в попередній задачі, усі грані паралелепіпеда, описаного навколо ортоцентричного тетраедра, – ромби з рівними сторонами. Отже, суми квадратів діагоналей цих ромбів рівні між собою. Слід урахувати, що діагоналі цих ромбів дорівнюють протилежним ребрам даного тетраедра. **831.** В ортоцентричному тетраедрі основи висот кожних двох граней, опущених на їх спільне ребро, збігаються. Тому $a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2 = 4(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2)$. **832.** Використайте результат попередньої задачі. **834.** Довести це твердження можна методом від супротивного. Якщо припустити, наприклад, що в прямокутному тетраедрі $ABCD$ $AB = CD$ і $AC = BD$, то його грані ABC і DBC мають бути рівними трикутниками. Отже, якщо кут BDC прямий, то й BAC прямий. А цього бути не може. **835.** а) У кожному прямокутному тетраедрі $S_A = \frac{3V}{a}$, $S_B = \frac{3V}{b}$, $S_C = \frac{3V}{c}$, $S_D = \frac{3V}{h}$, тут a, b, c – ребра, а h – висота, яка виходить з вершини прямого тригранного кута. Якщо підставити ці значення в подвійну нерівність п. 26, дістанемо: $\frac{3V}{h} < \frac{3V}{a} + \frac{3V}{b} + \frac{3V}{c} \leqslant \frac{3\sqrt{3}V}{h}$.
б) Поділіть обидві частини рівності $S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2$ на $9V$.
в) Використайте нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним чисел $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$ і $\frac{1}{c^2}$. **836.** Доведіть, що в кожному тетраедрі $4S_{ADS}^2 = S_B^2 + S_C^2 + 2S_BS_C\cos AD$ і т. д. Якщо двогранні кути при ребрах AD, BD і CD прямі, то $4(S_{ADG}^2 + S_{BDG}^2 + S_{BDG}^2) = 2(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2) = 2S_D^2$, звідси $S_{ADG}^2 + S_{BDG}^2 + S_{BDG}^2 = \frac{1}{2}S_D^2$. **837.** Використайте результат попередньої задачі. **839.** а) Можна цю рівність довести, виходячи із співвідношення $S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2$. б) $\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 \geq 3V\sqrt{\cos^2\hat{a}_1 \cos^2\hat{b}_1 \cos^2\hat{c}_1}$ і, як показано в попередній задачі, ліва частина цієї нерівності дорівнює 1. в) Доведіть, що $\cos\hat{a}_1 = \frac{h}{a}$, $\cos\hat{b}_1 = \frac{h}{b}$, $\cos\hat{c}_1 = \frac{h}{c}$.

ЗМІСТ

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна
ВЛАДІМІРОВ Володимир Миколайович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Профільний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

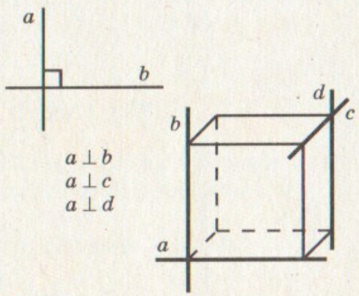
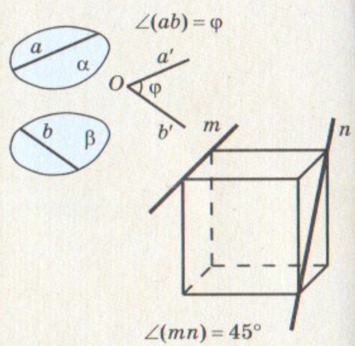
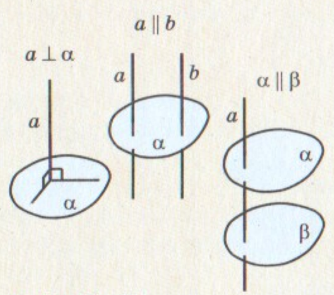
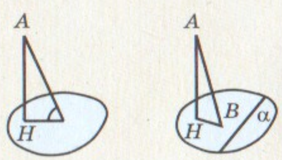
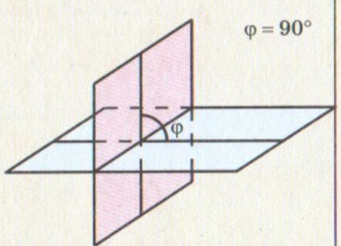
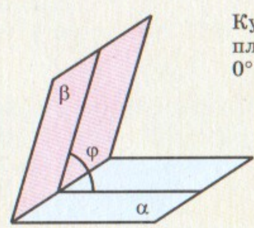
Редактор *О. Мовчан.*
Обкладинка, ілюстрації *В. Соловйова.*
Макет *С. Железняк.*
Художній редактор *В. Соловйов.*
Технічний редактор *В. Олійник.*
Комп'ютерна верстка *О. Дружинського, О. Білохвост.*
Коректори *І. Іванюсь, Л. Леуська.*

Формат $60\times 90/_{16}$. Умовн. друк. арк. 14,5.
Обл.-вид. арк. 13,37. Наклад 124 350 (1-й з-д: 1–77310) прим.
Вид. № 1043. Зам. № 291.

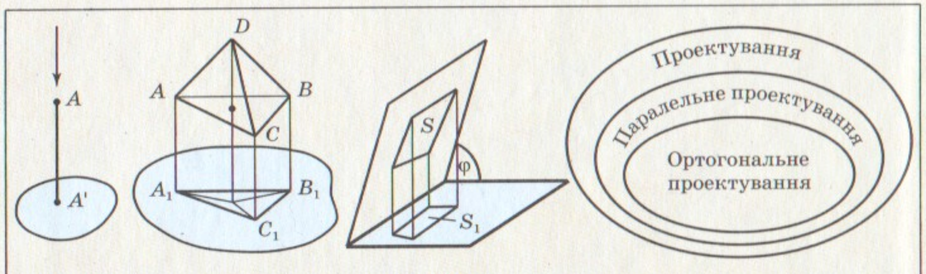
Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців серія ДК № 25 від 31.03.2000 р.

Віддруковано з готових позитивів на
ДП «Видавництво і друкарня "Таврида"»,
95000, АРК, м. Сімферополь, вул. Генерала Васильєва, 44
E-mail:marketing@tavridabook.com.ua
Свідоцтво серія ДК № 1174 від 25.12.2002 р.

Перпендикулярність прямих і площин

Відношення	Перпендикулярні	Не перпендикулярні
Пряма і пряма	 O, T_{13}	 O, T_{12}
Пряма і площина	 $O, T_{14}, T_{15}, T_{16}$	Теорема про три перпендикуляри  O, T_{17}, T_{18}
Площина і площина	 O, T_{20}, T_{21}	Кут між площинами $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$  O, T_{19}

Ортогональне проектування



O, T_{22}

$S_1 = S\cos\varphi$

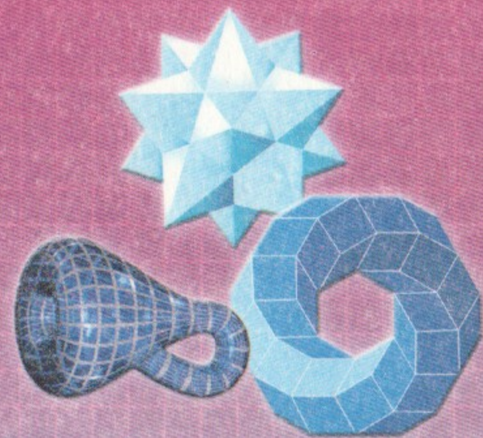
Грецький алфавіт

Друковані літери	Назви літер	Друковані літери	Назви літер
Αα	альфа	Νν	ню (ні)
Ββ	бета	Ξξ	ксі
Γγ	гамма	Οο	омікрон
Δδ	дельта	Ππ	пі
Εε	епсилон	Ρρ	ро
Ζζ	дзета	Σσ	сигма
Ηη	ета	Ττ	тау
Θθ	тета	Υυ	іпсилон
Ιι	йота	Φφ	фі
Κκ	капа	Χχ	хі
Λλ	ламбда	Ψψ	псі
Μμ	мю (мі)	Ωω	омега

Латинський алфавіт

Друковані літери	Рукописні літери	Назви літер	Друковані літери	Рукописні літери	Назви літер
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	ге (же)	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	ха (аш)	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве
Jj	*Jj*	йот (жі)	Ww	*Ww*	дубль-ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет

Навчально-методичний комплект «Геометрія–10» створено відповідно до чинної програми з урахуванням сучасних тенденцій розвитку шкільної освіти.
Він складається з підручника, книги для вчителя та дидактичних матеріалів.



ISBN 978-966-504-997-5